



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

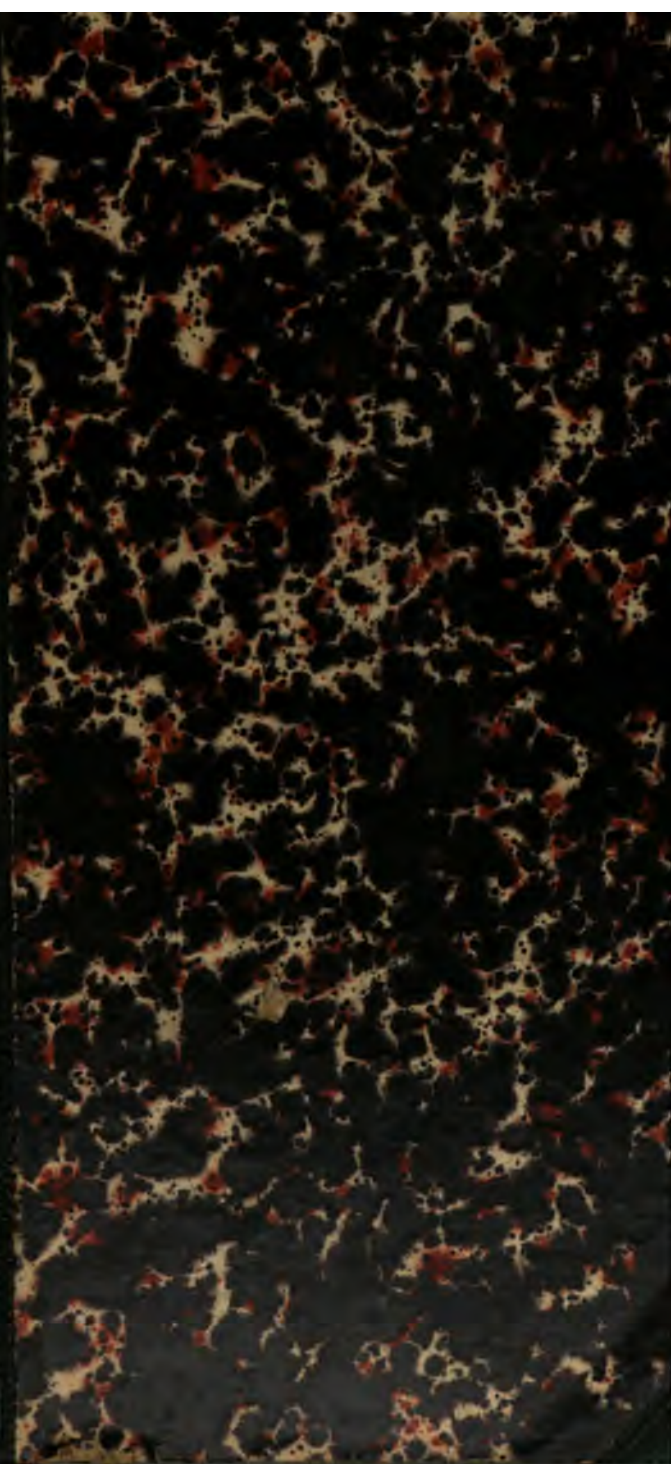
We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

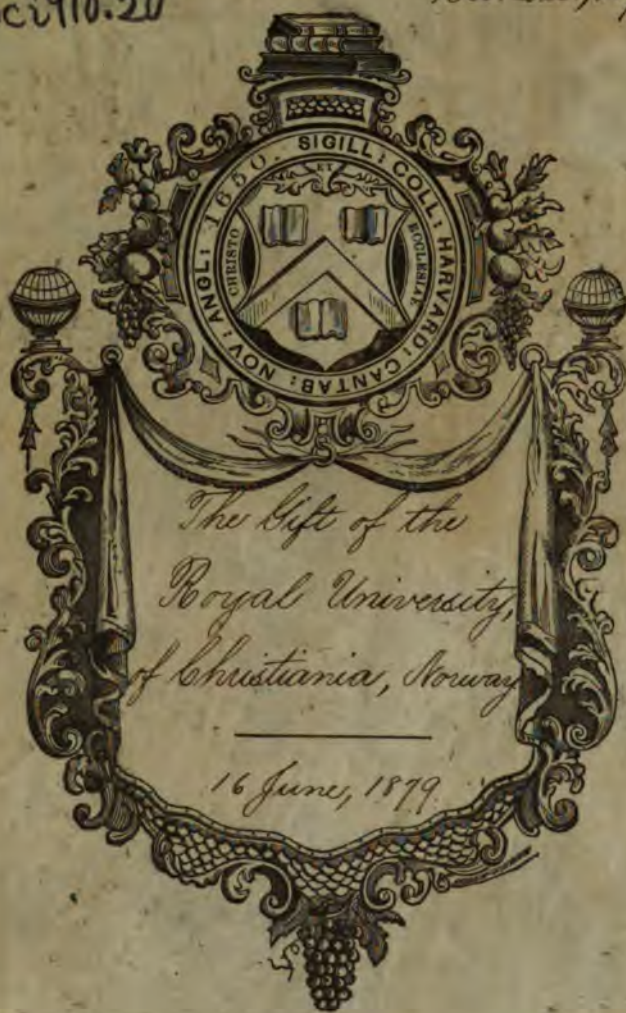
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

THE  
OF  
KAB



Sci910.20

*Bd. Dec., 1879.*



SCIENCE CENTER LIBRARY















© Imperfect: - Plate I. is uncut

## Archiv

for

12 1/2  
3

# Mathematik og Naturvidenskab.

Udgivet

(Gakol-) af Jørg Osian  
Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars.

---

Første Bind.

---

Kristiania.

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

1876.



~~VI. 605~~  
Sci910.20

1879, June 16.  
Gift of the  
Royal University  
of Christiania,  
Norway.  
(1c - 3c Bind.)

# Indholdsfortegnelse.

	Side.
<b>S. A. Sexe.</b> Om nogle gamle Strandlinier. . . . .	1—18.
<b>Sophus Lie.</b> Theorie der Transformations-Gruppen. Ab- handlung I. . . . .	19—57.
<b>Amund Helland.</b> Om de isfyldte Fjorde og de glaciale Dannelser i Nordgrønland. . . . .	59—125.
<b>Jakob Worm Müller.</b> Om Tællingen af de røde Blod- legemer efter Malassez's Methode. . . . .	126—140.
<b>Jakob Worm Müller.</b> Om Forholdet imellem Blodlege- mernes Antal og Blodets Farvekraft. . . . .	141—151.
<b>Sophus Lie.</b> Theorie der Transformations-Gruppen. Ab- handlung II. . . . .	152—193.
<b>Sophus Lie.</b> Vervollständigung der Theorie der Berührungs- Transformationen. . . . .	194—202.
<b>S. A. Sexe.</b> Hvorfor blæser det ikke bestandig fra Øst i det saakaldte stille Belte? . . . . .	203—210.
<b>Karl Pettersen.</b> Saltens Geologie. . . . .	211—223.
<b>Amund Helland.</b> Om Klormængden i Nordseen, Atlanter- havet og Davisstrædet. . . . .	229—238.
<b>E. Münster.</b> Om Hytteproduktet, Sten. . . . .	239—244.
<b>Sophus Lie.</b> Résumé einer neuen Integrations-Theorie. . .	245—266.
<b>Karl Pettersen.</b> Bidrag til det nordlige Norges Orografi. (Med 2 Kart). . . . .	267—287.
<b>H. Geelmuyden.</b> Om Indflydelsen af Banens Excentricitet paa den Varmemængde, som et Himmellegeeme modtager fra Solen . . . . .	288—295.
<b>Karl Pettersen.</b> Rishulen ved Lavangbotten. (Med 1 Kart).	296—299.



## Trykfeil.

Pag. 204, Linie 29, læs «bortseet fra» istedetfor «uagtet.»

— 837, — 4, -  $f_1 \dots f_q$  istedetfor  $F_1 \dots F_q$ .

— 837, — 13, -  $f_1 \dots f_q$  —  $F_1 \dots F_q$ .

— 837, — 17, Bogstaverne  $F_1$   $\varnothing$  udgaar.

— 338, — 31, læs  $+dU$  istedetfor  $-dU$ .

## OM NOGLE GAMLE STRANDLINIER

AF

S. A. SEXE.

I »Nyt Magazin for Naturvidenskaberne« 1ste Bind 1838 beskriver Professor Keilhau en saakaldet gammel Strandlinie i fast Klippe i Nord-Østerfjorden i Bergens Stift; i Universitetsprogram for andet Halvaar 1872 omhandler Professor Th. Kjerulf to Linier af samme Slags i Havigfjældet strax vestenfor Throndhjem og i »Voyages en Scandinavie, en Laponie, au Spitzberg et aux Féroë« omhandler A. Bravais nogle gamle Havsniveau-Linier paa Strandstrækningen mellem Hammersfest og Kaafjorden i Vestfinmarken. Disse Linier, som jeg ikke kjendte af egne Iagttagelser, da jeg skrev om Strandlinier i Universitetsprogram for første Semester 1874, fremhæves som de bedste Exempler paa gamle Strandlinier i vort Land; selvfølgelig maa de ogsaa betragtes som de bedste Støtter for den paa gamle Strandlinier grundede Lære, at Landets Stigning efter Istiden gik for sig gjennem Spring med lange mellemliggende Pauser.

Hvad Strandlinien i Nord-Østerfjorden betræffer, som jeg undersøgte Sommeren 1874, saa findes der, som omhandlet i Christiania Videnskabs-Selskabs Forhandlinger for samme Aar, Skuringsstriber fra Istiden i den. Følgelig maa den være blevet til enten før eller under Istiden, skriver sig saaledes ikke fra Havets Erosion under en Pause i Landets Stigning efter Istiden.

For at komme efter, om det havde sig paa samme Maade

med Ilsvigens og Vestfinmarkens Strandlinier, undersøgte jeg dem i afvigte Sommer.

Hvad Linierne i Ilsvigfjældet angaar, saa springe de paa Afstand langt fra saa i Øinene som Strandlinien i Nord-Østerfjorden, medens de paa nært Hold ere langt fra saa gjækkende som denne. Man behøver da ikke at spørge, hvor de blev af, naar man kommer paa Stedet. Ved Sigtning over Vandkolonner i kommuniserende Rør overbeviste jeg mig om at den underste af disse Linier ligger saa omtrent horizontalt, og ved Nivellement fandtes dens Bundflade at ligge i 496 Fods Højde over Havets Flodstand — formentlig almindelig Flodhøide — kort før Nivellementet tog sin Begyndelse. Linien eller Furen eller egentlig Bænken med horizontalt Sæde og vertikal Ryg er omkring  $\frac{1}{10}$  Mil lang og bestaar for det meste af stærke Indsnit i fremstaaende Partier af det bratte Ilsvigfjæld, medens den ikke skjærer sig ind eller er saa godt som afbrudt i de tilbagetrukne Partier af samme, hvilket er en Gjentakelse af hvad Professor Keilhau iagttog i Nord-Østerfjordens Strandlinier. Ilsvigens saakaldte Strandlinie er ikke begrændset af en halvkylindrisk Hulflade, hvad der ventelig vilde været Tilfældet, naar den havde været en Erosionsfure, men af to hinanden skjærende Flader, hvoraf den ene, Bundfladen, som allerede antydtes, ligger horizontalt, medens den anden staar vertikalt. Mod Nord ender Furen i Protogyn, mod Syd i en skiktet Bergmasse, ligger ogsaa i denne med Størstedelen af sin Længde. I Høide med Furens Indsnit i Klippens fremstaaende Partier ere de tilbagetrukne do. — uden at der er fremstaaet nogen Terrasse — bedækkede med Muld, Grus, Sten, hvoriblandt en og anden paa Stedet fremmed Rullesten. Hvor Furen er skaaret ind i Klippen, har den en for det meste — paa sine Steder indtil 16 à 20 Skridt — bred Bundflade, som skjules af Buskads, Muld, Mos, Lyng, medens Indsiden af Furen sammesteds fremviser nøgne, brøstfældige, 20 Fod og derover høie Præcipicer, ved hvis Fod der er anholdet Stenurer, Klippeblokke, som efterhaanden faldt

ned fra Præcipicerne. I Klippen, som danner Furens Indside, og parallel med denne, saaes ikke sjelden vertikale Afledningskløfter, der aabenbare et Strukturforhold, som ikke kan sættes ud af Betragtning, hvor der handles om Liniens Oprindelse.

Lige over den søndre Ende af den saaledes beskrevne Fure og i et 38 Fod høiere Niveau, altsaa 534 Fod o. H. træffer man i Klippen en stærk Indskjæring, som tilligemed en Stump Terrasse kan gjælde for en Begyndelse til endnu en Linie, hvis Fortsættelse dog udeblev.

Med horizontale, over Havet liggende Furer i Strandklipperne, samt Landets Stigning for Øie falder man vistnok lettelig paa den Tanke, at de ere gamle Strandlinier. Dette forslaaer dog ikke til at hæve Tanken til Dogme.

Naar man udgiver en horizontal, over Havet liggende Fure i Strandklipperne for en gammel Strandlinie, saa pligter man idetmindste at sandsynliggjøre følgende Forudsætninger: 1) At Havet besidder Evne til i sit Niveau at udhule Furer i Klipperne, naar det faar Tid dertil; 2) At den Klippezone, hvori Furen har sit Leie, engang laa i Høide med Havet i et langt Tidsrum, og 3) At Landet derpaa steg saaledes, at Furen med Bibehold af sin horizontale Stilling løftedes fra Havets Niveau til sin nutidige Beliggenhed, hvortil knytter sig den Slutning, at de horizontale Zoner paa Strandklipperne, som ingen Furer have at opvise, hævedes saa hurtigt over Havfladen, at Havet ikke fik gjort nogen Fure i dem.

Den Omstændighed, at Klippefuren i Ilsvigfjældet ligger horizontalt, kan naturligvis ikke borge for nogen af disse Forudsætninger.

Ifølge Opgave i Universitetsprogram for andet Halvaar 1872 ligger den nederste af Linierne i Ilsvigfjældet 462' o. H. og den øverste 516' o. H., den første altsaa 34', den sidste 18' lavere end efter min Maaling.

«Ser vi os nu om» — siger Forfatteren af bemeldte Program — «efter høitliggende åbne hovedterrasser i Trondhjems

omegn, hvilke skulde svare til dette Niveau, da frempeger sig først og fremst den store flade, hvorover jernbanelinien fører 1 mil syd for Trondhjem, nemlig Heimdalssletten, der er en af de mest påfaldende og største terrasser i omegnen. Dens flade ligger mellem 450 og 480 fod. Ligeledes den vakre høitliggende åbne terrasse, som nu stærkt udskåret gjenstår ved Bjørkan i Nidelvens løb 523 fod. Ligeledes de første høitliggende åbne terrasser i Guldalen, de som jernbanelinien passerer en på hver side ved Mo og Søberg, 480 fod, og længer op i Guldalen de påfaldende terrasser ved Bunæs; her endog de samme trin, det øverste 515', det lavere 465'.

Efter de Forestillinger, som man gjør sig om saadanne Terrassers Dannelsesmaade, bleve de afsatte under Vand, og deres horizontale Overflade laa engang omtrentlig i Høide med Vandeds Flade, hvad her vil sige: Havets Overflade. Men af den Omstændighed, at de omhandlede Linier nu ere horizontale og ligge i Høide med visse Terrassers horizontale Overflader, som engang laa i Havets Niveau, følger hverken at Linierne nogensinde laa i Høide med Havet, ei heller, om saa var Tilfældet, at de laa der paa samme Tid som de respektive Terrasser. Thi dette forudsætter, at ethvert Punkt i den til Veirs stødte Del af Jordbunden blev hævet lige meget.

Naar man gik ud fra den Forudsætning, at Landets Stigning var gaaet for sig roligt, langsomt, saa vilde det ikke være saa vanskeligt, at forsone sig med den Tanke, at Punkter, som ligge i en Horizontallinie eller Horizontalplan nu, ogsaa laa i en Horizontallinie eller Horizontalplan, før Hævningen fandt Sted. En saadan Stigning vilde være af samme Art som den, Naturen har vedkjendt sig paa Kysten af den bottniske Bugt, hvis hævede Strandlinier formentlig ikke afvige mere fra Horizonten end at de kunne passere for horizontale. Naar derimod Stigningen skal gaa for sig i Spring, saa lader den hævende Kraft sig vanskelig tænke saaledes fordelt, at hvert Punkt i den hævede Linie eller Flade bliver løftet lige meget. Der er



ialfald ligesaa stor Sandsynlighed for, at et System af Punkter, som efter Springet ligger i et Horizontalplan, før Springet laa i en vis bestemt Flade, som afveg fra Horizontalplanet. Og da der kan tænkes uendelig mange fra Horizontalplanet afvigende Flader, saa er det langt sandsynligere, at Systemet før Springet laa i en af disse, end at det laa i et Horizontalplan. Sandsynligheden for, at de respektive Linier og Terrasser laa samtidigt i Havets Niveau, er saaledes meget liden, sammenholdt med Sandsynligheden for, at de ikke laa paa samme Tid i Havets Niveau, hvorunder indbefattes: a) at Terrasserne vare komne over Havets Niveau, mens de Klippezonor, hvori Linierne have sit Leie, enten laa i eller under Havfladen; b) at Terrasserne laa i Havfladen, medens bemeldte Zoner laa under samme, og c) at Zonerne laa over Havfladen, medens Terrasserne laa i eller under samme. Og om end det lidet Sandsynlige indtraf, nemlig at bemeldte Klippezonor og Terrasser samtidig laa i Havets Niveau, saa er det ikke derved afgjort, at Furerne i Hsvigfjeldet ere Strandlinier. Thi dertil udfordres endnu for det Første, at Havet besidder Evne til at erodere Furer i Strandklippen, for det Andet, at bemeldte Zoner og Terrasser laa saalænge i Høide med Havet, at dette fik Tid til at udhule Furerne. Terrasserne afgive ingen Borgen for, at Havet fik den nødvendige Tid til dette Arbeide. Thi dels kan Terrassernes Opførelse være begyndt saa tidlig, at de laa færdige i Havfladen, idet bemeldte Zoner naaede op til samme, færdige altsaa i det samme Furerne paabegyndtes; dels lader det sig tænke, at endog en meget mægtig Terrasse kan opføres i en forholdsmæssig kort Tid, naar Bygningsmaterialet er grovkornet og Tilgangen deraf er rigelig og stadig. Bemærkes kan det ogsaa, at en Terrasse kan bygges, medens Landet stiger, og at det egentlig kun er Terrassens Afslutning eller Dannelsen af dens jævne, horizontale Overflade, som kræver Stilstand, eller dog ikke tilsteder en rask Stigning.

Men lad Havet besidde de fornødne eroderende Kræfter og

lad Terrassen ved Bjørkan og den øverste Terrasse ved Bunæs være Borgen for, at det fik Tid til at udgrave den øverste Linie i Ilsvigfjeldet; lad Landet derpaa springe 54 Fod i Veiret saaledes, at Linien beholder sin Horizontalitet og forbliver i Niveau med bemeldte Terrasser; lad saa Heimdalsterrassen og den nederste Terrasse ved Bunæs borge for, at Havet fik Tid til at udhule den nederste Linie i Ilsvigfjeldet, og lad endelig Landet springe 462 Fod til Veirs paa samme reglementerede Maade: saa har man vistnok Linierne i Ilsvigfjeldet saaledes som de i Virkeligheden foreligge. Men man er ikke færdig dermed: man maa ogsaa se efter, hvorledes Konsekventserne af disse Indrømmelser stille sig til de faktiske Forholde forøvrigt.

Det er da for det Første besynderligt, at der ikke findes flere end to Strandlinier i Ilsvigfjeldet. Der gives nemlig i Nidelvens Dal mindst tre mærkelige Terrasser, alle lavere end den laveste af de omhandlede Linier paa bemeldte Fjæld. Paa den øverste af disse Terrasser ligger Gaarden Leren og Gaarden Stubban, paa den næstøverste ligge Gaardene Nardo og Sundland, medens Cicilienborg ligger paa den nederste. Hvorfor ikke en Strandlinie paa Ilsvigfjeldet i Høide med enhver af disse Terrasser? Om man vilde sige, at disse Terrasser ere lidet mægtige og at saaledes deres Opførelse var for kortvarig, til at Havet kunde udgrave Strandlinier i Høide med dem, saa maa det bemærkes, at ingen af disse Terrasser har saa ubetydelig en Mægtighed, dernæst, at den Terrasse, hvorpaa Leren ligger, muligens er mægtigere end Heimdalsterrassen, skjønt denne naar op i et høiere Niveau. Lerens Terrasse har nemlig sit Fundament nede i Nidelvens Dal i Høide med Elven, medens Heimdalsterrassen høist sandsynligt hviler paa en over bemeldte Fundament ikke saa lidet høinet Fjældryg. Endelig maa det bemærkes, at en Terrasses Mægtighed ikke er nogen paalidelig Index for Længden af den Tid, som dens Opførelse medtog. Af grovkornet Materiale kan, som allerede bemærket, under rigelig og stadig Tilgang deraf opføres en mægtig Terrasse i

forholdsmæssig kort Tid, medens under svag og afbrudt Tilgang af finkornet Materiale endog i meget lang Tid kun lader sig opføre en Terrasse af meget liden Mægtighed.

For det Andet er det besynderligt, at Havet, som skar sig saa dybt ind i Ilsvigfjældets fremstaaende Partier, kunde forskaane de tilbagetrukne eller mindre fremstaaende do. Man kunde maaske tænke sig, at der ikke var nogen mindre fremstaaende Partier i dette Fjæld dengang, da Furen blev udhulet, at denne skar lige dybt ind overalt og at det er Forvittring, som er Skyld i at Klippen nu paa sine Steder staar mindre frem, og at Furen der er saa godt som udslettet. En saa stærk Forvittring rimer sig imidlertid ikke med, at man nede ved Stranden endnu finder Spor af Stribning fra Istiden.

For det Tredie er det besynderligt, at Havet, som skar sig saa dybt ind i Ilsvigfjældets Østside, ikke havde Evne til at grave Furer i Fjældets øvrige Sider, hvor det kom i Berørelse med dem, uden at de lagde særegne Hindringer i Veien, hvilket, saavidt jeg kunde opdage, ikke var Tilfældet.

Hvis man vil forklare disse Besynderligheder derved, at Klippen der, hvor Furerne ligge, paa Grund af fysisk-kemiske Egenskaber var særlig skikket for Erosion, saa ligger den Tanke nær, at i saa Fald kunde Furerne Udhuling ikke medtage synderlig lang Tid, vel muligt ogsaa at Furerne da kunne være eroderede over Havfladen formedelst Forvittring.

Efter hvad der saaledes er paapeget, bliver det formentlig en saare tvivlsom Paastand, at Linierne i Ilsvigfjældet skrive sig fra Havets Erosion under en Pause i Landets Stigning efter Istiden.

I Universitetsprogram for første Semester 1874 lod jeg den Tanke komme til Orde, at de saakaldte gamle Strandlinier i fast Klippe muligens skrev sig fra Istidens ned fra Høilandet og ud af Fjordene skridende Gletschere. Ilsvigfjældet er kjendelig moutonneret, har saaledes i høi Grad været udsat for Høvling og Skuring af Isbræer. Der findes ogsaa paa et Par Steder umiskjendelig Stribning nede ved Stranden. Men det er Til-

fældet her som ellers saa ofte, nemlig at Mærkerne efter Istiden tabe sig mere og mere, jo høiere man kommer op fra Havet. Utvivlsomme Skuringsstriber fandt jeg ikke i de omhandlede Furer, hvorved dog er at bemærke, at Bundfladen i den øverste Fure var fuldstændig, og at Bundfladen i den nederste Fure var næsten fuldstændig bedækket af løst Materiale, medens Furerens Sideflader ere for nye til at Istidens Gletschere kunde have sat sine Mærker paa dem. At den nederste Fure skjærer stærkt ind i Klippens fremstaaende Partier, medens den skaaner de tilbagetrunkne do., stemmer godt med en glacial Oprindelse. Thi naar en Isbræ skrider frem langs med en Klippeside under klods Berørelse med samme, saa angriber den naturligvis mest, hvad der stiller sig mest i Veien, nemlig Klippens fremstaaende Dele. Det skulde forøvrigt ikke forundre mig, om Nogen vilde henhøre Klippefurerne i Ilsvigfjældet til det Slags Foreteelser, som man kalder Tilfældigheder 3: Virkninger af en Komplex af Aarsager, som man ikke kjender, eller dog ikke ser sig istand til at paavise i det Enkelte.

Hvad de idetmindste efter Anseende horizontale Furer paa Klippestrandene mellem Hammerfest og Kaafjorden betræffer, saa ere de paa sine Steder saa markerede, at man under visse Omstændigheder vanskelig kan undgaa at blive dem var; og der kan ikke være Tale om at betragte dem som Tilfældigheder. Havde Klippen, hvori disse Furer optræde, været skikket til at modtage og beholde Stribning, Skuringsstriber fra Isbræer, saa havde høist sandsynligt et Skridt ladet sig gjøre fremad med Hensyn til Løsningen af Spørgsmaalet baade om hvorledes, og naar Furerne bleve til: Furer med Stribning paa deres Flader skrive sig ikke fra den postglaciale Tid. Furer med Striber efter Længden ere høist sandsynligt udhulede af Isbræer; og Furer uden Stribning og uden Politur i Klippe, skikket til at modtage og beholde Stribning, skrive sig ikke fra Isbræer. Men uheldigvis er Klippen, hvori de Furer forekomme, hvorom her handles, saa lidet haard og fast, at den maatte være usik-

ket baade til at modtage og beholde Skuringsstriber. Og saaledes fandtes der i disse Furer hverken indristet Noget om deres Tilblivelsesmaade eller Fødselsdatum, uden at man dog derfor er berettiget til at slutte, at der aldrig har været gjort Forsøg paa at anbringe nogen Inskriptioner i dem.

Paa Kyststrækningen mellem Kaafjorden og Kvalsund træffer man hist og her, fornemmelig i Vargsund, Klippefurer, horizontale, som det synes, og fordetmeste af kort Udstrækning. Saadanne Furer findes ogsaa paa den nordøstlige Side af Øen, Seiland, paa Vestsiden af Kvalsund og flere Steder. Paa den yderste Strandstrækning mellem store og lille Lerisfjord, paa Zarabynæsset og Kvænklubben i Vargsundet sees to saadanne i forskellige Høider liggende Klippefurer. Paa den østlige Side af Kvalsund, paa Kvænklubben og Zarabynæsset have Klippefurerne ingen ubetydelig Udstrækning. Paa begge de sidstnævnte Steder ligge Furerne i meget brat Klippe, og paa begge Steder er den øverste Fure mest udpræget og sammenhængende. Den nederste Rand af den nederste Fure paa Kvænklubben er stykkevis borte, medens den øverste Rand staar igjen. Maaske har Furen paa de betræffende Steder aldrig havt nogen nederste Rand. Den nederste Fure paa Kvænklubben lader sig paa Grund af Klippens Steilhed ikke befare. Den øverste Fure saa ud til at den skulde kunne befares. Jeg forsøgte dog forgæves derpaa. Paa Zarabynæsset er ogsaa Klippen steil. Imidlertid lade dog Furerne sig der befare. Jeg fulgte den øverste Fure fra Ende til Ende, fandt den meget ujævn, fandt Grus i den og ikke sjelden runde Stene, som syntes at være fremmede paa Stedet og af samme Slag som de Rullestene, der ligge henkastede paa Stranden ved Klippens Fod, hidførte uden Tvivl af Isbræer fra det Fjerne, fra det Indre af Fjorden. Bravais anslaa Bredden af saadanne Klippefurer fra 3 til 6 Fod.

Saavidt jeg kunde erfare, bestaar Klippen, hvori disse Furer forekomme, overalt af en graalig-blaalig sort Skifer, som ikke er nogen typisk Bergart, men vel nærmest maa kaldes Lerskifer.

Paa lange Strækninger mellem disse sporadiske Klippefurer findes stykkevis horizontale eller paa det nærmeste horizontale Linier i løst Terrain, snart høiere, snart lavere, snart en, snart to, iblandt flere over hinanden paa Stedet. Af disse Linier gives der to Slag. Det ene Slag staar i Forbindelse med Terrasser, opdyngede, hvor Elve og Bække munde i Søen. Dette Slags Linier have liden Udstrækning. Linier af det andet Slag have ofte en stor Længde og vise sig paa Strandstrækninger, hvor Elve og Bække ikke have sit Udløb i Søen. Disse Linier danne Grænsen mellem, som det ser ud til, horizontalt løbende Bakkezoner, hvoraf den øvre har en større, den nedre en svagere Hælding.

Disse forskelligartede Liniestykker: Klippefurer, Terrasselinier og Linier i løst Terrain uden Terrasser, ligge efter Bravais's Opfatning saaledes, at de, uagtet hyppige og lange Afbrydelser, lade sig betragte som integrerende Dele af to Hovedlinier, som, hver i sin Høide, strække sig fra Kaafjorden til Hammerfest, der ligger i en Afstand af 9 à 10 norske Mile fra hinanden. Disse to Liniers Høide over Havet paa følgende 6 Steder, nemlig: (I) det sydligste Parti af Altenfjorden: Sandfaldets, Kvænvigens og Kaafjordens Terrasser, (II) Krognes til Talvig, (III) Komagfjord, (IV) Lerisfjord til Kvænklub, (V) den østlige Side af Seiland, (VI) omkring Hammerfest, opgiver Bravais i Middeltal saaledes:

	I	II	III	IV	V	VI
Øvre Linie	67 <sup>m</sup> ,4	56 <sup>m</sup> ,5	51 <sup>m</sup> ,8	49 <sup>m</sup> ,6	42 <sup>m</sup> ,65	28 <sup>m</sup> ,6
Nedre Linie	27 <sup>m</sup> ,7	24 <sup>m</sup> ,5	20 <sup>m</sup> ,5	18 <sup>m</sup> ,3	16 <sup>m</sup> ,6	14 <sup>m</sup> ,1
Høideforskjel	39 <sup>m</sup> ,7	32 <sup>m</sup> ,0	31 <sup>m</sup> ,3	31 <sup>m</sup> ,3	26 <sup>m</sup> ,05	14 <sup>m</sup> ,5

Efter Bravais's Formening laa hele den «øvre Linie» paa een Gang i Høide med Havet, hvis Frembringelse efter hans Anskuelse Linien er, hvorpaa Landet sprang til Veirs saa, at Linien paa de respektive Steder kom i de Høider over Havet, som Tallene under Stregen angive. Medens Linien laa saaledes, fremskød den «nedre Linie» i Havets Niveau, hvorpaa Landet atter gjorde et Spring, hvorved begge Linier kom op i sin



nutidige Beliggenhed. Som det vil sees, tænker ikke Bravais sig Landets Spring til Veirs saaledes, at hvad der laa i Havets Niveau før Springet, ogsaa ligger i et Horizontalplan efter Springet. Den sydlige Del af disse Linier ligger jo efter hans Iagttagelser meget høiere over Havet end den nordlige Del.

Foruden disse Hovedlinier omhandler Bravais endnu tvende Strandlinier, som han kalder tvivlsomme. Den ene af disse angives at ligge mellem Hovedlinierne, den anden mellem den nederste Hovedlinie og Havet. Forudsat at disse tvivlsomme Linier ere virkelige, kræver enhver af dem, efter Bravais's Opfatning, en Pause og et Spring. Til Forklaring af Strandliniefænomenerne mellem Kaafjorden og Hammerfest udkræves altsaa 4 Spring i Landets Stigning og 5 Pauser, naar den nu stedfindende Stilstandsperiode medregnes.

I «Ancient Sea-margins as memorials of changes in the relative level of sea and land» opponerer den skotske Geolog Robert Chambers mod ovenomhandlede, fra Syd mod Nord hældende, Hovedlinier, og mener, at de paa forskellige Steder forekommende Liniestumper ere horizontale, at enhver af dem, der ligger i en Høide over Havet, som ingen anden af dem har, er en gammel Strandlinie for sig, og at, naar flere af dem ligge i samme Høide, saa udgjøre de Stykker af en og samme gamle Strandlinie. Hvormange gamle Strandlinier der efter denne Opfatningsmaade kommer ud, og hvormange Spring og Pauser i Landets Stigning der maa til, for at forklare Strandliniefænomenerne mellem Kaafjorden og Hammerfest, maa staa derhen. Ikke at tale om Finmarkens øvrige Strandlinier.

Om nogen af disse Opfatningsmaader af Liniernes Stilling og indbyrdes Forhold er den rette, og, i Tilfælde, hvilken, lader sig ikke afgjøre ved hypsometriske Iagttagelser med Barometer. Her kræves en Nøjagtighed, som Barometret ikke kan præstere. Man maa gribe til trigonometriske Observationer eller Nivellements eller begge Dele, der maa udføres med megen Nøjagtighed. Nivelleringen vil i høj Grad vanskeliggøres ved

ved følgende Omstændigheder: a) Klippefurerne forekomme ikke sjelden paa et Terrain saa brat, at det er umuligt at nivel- lere derpaa, i hvilke Tilfælde man bliver nødsaget til at nivel- lere paa Afstand, som man ofte ikke kan vælge efter Behag. b) Linierne tegne sig ikke skarpt uden paa Afstand, hvorfor man hyppig vil blive nødsaget til paa fjernt Hold at søge at finde deres øverste Grændse, Midte eller nedre Grændse. c) Man har ingen fast, bestemt Horizontallinie at gaa ud ifra nede paa Stranden. Bravais tror at have fundet en saadan Linie i den nederste Rand af et Strandbelte, bevoxet med «*fucus vesiculo- sus*», hvilken Linie han sætter til en Høide af 0,<sup>m</sup>6 over Ha- vets midlere Stand. Han medgiver dog, at bemeldte Rand ikke, strængt taget, overalt ligger lige høit.

Men hvorvel det paa Iagttagelsernes nuværende Standpunkt vilde være forhastet, at gjøre et Forsøg paa at udfinde en ende- lig Forklaring af disse Strandliniefænomener, saa lader sig dog allerede nu sige saa meget, at hvilken af de ovenomhandlede Opfatningsmaader man end foretrækker, saa støder man paa følgende Vanskeligheder, naar Klippefurerne skulle ansees for Strandlinier, udhulede af Havet.

1) Ved Altenelvns Udløb i Havet er en Terrasse, som hæver sig fra Søspeilet til 67<sup>m</sup>,4 eller 202,2 Fod over samme. I Kvænvigen er en Terrasse af samme Høide. Til at bygge Terrasser af saa stor Mægtighed medgik der ventelig en meget lang Tid. Og for saavidt Landet laa roligt, medens disse Terrasser opførtes fra Bunden til Havets Overflade, saa stod denne i meget lang Tid i Berørelse med Klipperne i den Høide, hvortil disse Terrasser sluttelig naaede op. Følgelig maatte Havet i denne Høide eller, hvad der kommer ud paa det samme, i sit daværende stationære Niveau faa udhulet en Fure i Klipperne overalt, at sige, hvis det besad de eroderende Kræfter, som man tillægger det. Men naar man fra Terassen ved Alten- elvns Munding i Havet træder hen paa Kongshavnsfjeldet og undersøger dette i Høide med Terrassens horizontale Overflade,

saa finder man ingen Erosionsfure, men vel Skuringsstriber fra Istiden. Heller ikke i Høide med Kvænvigens Terrasse findes nogen Erosionsfure paa Naboklipperne, men atter Skuringsstriber. Heller ikke i Høide med Terrassen i Bosekop, eller i Høide med Terrassen paa Krognæs findes nogen Erosionsfure paa Naboklipperne, men fremdeles Skuringsstriber. Men naar nu Havet ikke alene ikke har formaaet at udhule Furer paa bemeldte Klipper i bemeldte Høider, men ikke engang formaaet at udslette Skuringsstriberne sammesteds, saa kan det ikke være synderligt bevendt med dets Erosion, sammenholdt med den af Temperaturvexel og Atmosfærilierne bevirkede Forvittring ovenfor Havfladen, hvilken Forvittring, vel at mærke, maa staa tilbage for Havets Erosion, naar en Erosionsfure skal være mulig.

2) Fastholder man ikke destomindre, at de horizontale eller næsten horizontale Furer i Strandklipperne mellem Kaafjorden og Hammerfest ere en Frembringelse af Havet, saa maa man antage, at Erosionen var særlig begunstiget paa de Steder, hvor bemeldte Furer forekomme. Denne Begunstigelse kunde bestaa dels deri, at Klippen paa bemeldte Steder havde en saadan Skraaning, at Bølgeslaget kunde gnave paa dert, ved at skuppe løst Stenmateriale op og ned paa den, dels deri, at Klippen bestod af en saadan Bergart, som kun daarlig holder Stand mod Havets Angreb. Hertil maa bemærkes, at paa Zarabynæs og Kvænklubben, hvor de omhandlede Furer vise sig som tydeligst, er Klippen saa brat, at løst Stenmateriale, i Stedet for af Bølgeslaget at lade sig skuppe op og ned, strax vilde synke paa Dybet. Og hvis det er en særegen Bergart — hvad der virkelig synes at være Tilfældet — som betinger Furernes Forekomst, saa maa der spørges: Hvorfor fortsætte ikke Klippenerne kontinuerlig fra Kvænklubben til Kvalsund, paa hvilken Strækning der hersker den samme Bergart, nemlig Lerskifer, som i Kvænklubben? Og hvorfor ser man ikke umiskjendelige Tegn til en Erosionsfure i Havets nuværende Niveau paa Kvæn-

klubben, hvis Fodstykke ligger i Havet baade under Ebbe og Flod? Har Havet dersteds udhulet to Furer i Klippen før i Tiden, saa maatte det vel være begyndt paa den Tredie nu. At Strandlinierne i fast Klippe, som det lod til, fortrinsvis optræde i Lerskifer turde saaledes snarere have sin Grund deri, at denne lidet haarde Bergart let lader skure og skave Furer i sig af et fast Legeme, som under Tryk føres hen over den, end deri, at den saa let lader sig erodere af Vand.

Bravais nævner imidlertid tre Steder, hvor han formener at Havet nu holder paa at gjøre Furer i Strandklippen, nemlig Rastahynæs, et Sted i Rypfjord og et Punkt i Komagfjord. Paa de to førstnævnte Steder har jeg ikke været, hvorimod jeg har været paa det betræffende Punkt i Komagfjord, uden at kunne tiltræde Bravais's Formening for dette Punkts Vedkommende. Og om det nu var uimodsigeligt, at Klippen lod sig erodere af Havet paa disse tre spredte Punkter paa en Strækning af 9 à 10 norske Mile, saa maatte der vel være særegne Grunde tilstede i Klippen, hvorfor Erosion fandt Sted der fremfor paa andre Punkter. Saadanne særegne Grunde kunne være gode nok til at fremkalde Huler i Klipperne, men man kan neppe tage saadanne særegne, lokale Grunde for paalidelige Løfter om fremtidige Strandlinier.

3) Som allerede bemærket, fandtes hist og her i den øverste Klippefure paa det bratte Zarabynæs runde Stene, som ikke kunde antages at høre hjemme der: Hvorledes kom da disse Stene der, ifald Furen blev udvasket af Havet? At en Isbræ kan drage Stene med sig lange Veie, rulle dem runde og lægge dem efter sig, hvor den har sit Løb, er en ligefrem Sag.

4) Som ogsaa forhen bemærket, anslaa Bravais Klippefurernes Brede til mellem 3 og 6 Fod; og jeg tror ikke, at han feiler synderligt heri, navnlig forsaavidt vedkommer Furerne paa Zarabynæset og Kvænklubben. Efter Opgave fra Hammerfest er Afstanden mellem almindelig Ebbe og Flod dersteds 6 Fod, under Springflod 9 Fod, hvorimod Afstanden mellem al-

mindelig Ebbe og Flod i Komagfjord opgives til omtrent 8 Fod, i Springflod til 10 à 10½ Fod: Det synes ikke rimeligt, at en Sø, som steg og faldt 6 à 8 Fod og jævnlig af Vind og Storm jagedes mod Zarabynæset og Kvænklubben og slog og drev høit op paa samme, skulde have nøiet sig med at udhule Furer saa smale som mellem 3 à 6 Fod. Desuden forekom bemeldte Furer mig, idetmindste paa Frastand, for skarpt begrændsede, til at de kunde være blevne til gjennem Udvaskning af en snart stille, snart under vexlende Vinde bølgende, fraadende Sø.

6) Naar disse Strandlinier i fast Klippe ere Erosionsfurer, hvorfor træffer man dem inde i Sund og Fjorde, men ikke paa Klipperne ude mod det aabne Hav? Bravais giver intet andet Svar paa dette Spørgsmaal end:

«L'exposition du rivage à une houle plus ou moins forte joue un rôle important dans le phénomène des lignes d'érosion. Certaines côtes sont soumises directement à l'action de l'Océan, capable, pendant les tempêtes, d'ébranler la masse de ses eaux jusqu'à une profondeur que l'observation n'a point encore bien précisée, mais que l'on peut évaluer à une cinquantaine de mètres, sans crainte d'exagération. Nulle comparaison n'est possible entre ces rivages et d'autres plus paisibles que la mer du large ne saurait battre, et qui reçoivent le choc de vagues courtes, venues de faible distance. Il est douteux que l'on puisse découvrir une ligne nette d'érosion sur une falaise faisant face à la pleine mer, et je n'ai point eu, pendant mon séjour dans le Finmark, l'occasion de rechercher sur la face boréale des îles extérieures la continuation des lignes d'érosion que nous a montrées l'intérieur des fjords et des sunds de cette contrée».

Forudsat at Havet overhovedet besidder Evne til at udvaske Furer i Strandklippen, synes det dog rimeligt, at Havbølgen gjør baade bredere og dybere Furer end Fjordbølgen. Thi den Første tårner formentlig med større Fart mod Klippen og fremkalder derved en høiere Temperatur i Vandet, end den

Sidste, med andre Ord: Havbølgen synes baade paa mekanisk og kemisk Vei at maatte erodere stærkere end Fjordbølgen. Saaledes skulde man vente at træffe Strandlinier i fast Klippe hyppigere ude paa den aabne Kyst end inde i Sund og Fjorde. Af Grunde, som jeg har udviklet i Universitetsprogram for første Semester 1874, følger imidlertid højst sandsynligt, at Havet hverken i Storm eller Stille, hverken med Havbølger eller Fjordbølger formaar at udhule Furer paa vore faste Klipper.

Ingen af de saaledes paa pegede Vanskeligheder stiller sig i Veien for den Tanke, at Klippefurerne skrive sig fra Isbræer, som skred ned fra Høilandet og ud af Fjordene. Men, som allerede bemærket, lader Spørgsmaalet sig ikke diskutere, før end der foreligger nøiagtig Besked om Klippefurerenes Stilling til Horizonten, til hinanden, og særlig til de Linier i løst Terrain, som forekomme mellem dem. Et Spørgsmaal, som staar i nøie Forbindelse med det Foreliggende, er, om Klippefurer af den omhandlede Art kun forekomme i Fjordegne i høiere Bredder, og altsaa ere knyttede til det saakaldte Fjordfænomen, eller om man ogsaa nogetsteds træffer dem paa Kyster, aabne mod Havet, og i varmere Jordstrøg.

Hvad de, idetmindste efter Anseende horizontale, Linier i løst Terrain, som ikke skrive sig fra Terrasser, angaar, saa optræde de vistnok ogsaa sporadisk, men hyppigere og paa længere Strækninger af Gangen, end Klippefurerne, baade mellem disse, og paa Strækninger, hvor ingen Klippefurer forekomme. Saaledes ser man dem paa begge Sider af den Udløber af Altenfjorden, som kaldes Langfjorden, mest sammenhængende paa Østsiden. Fremdeles saa jeg dem, ligeledes sporadisk, paa Dampskibsleden indenskjærs lige fra Arnø under  $70^{\circ} 5'$  N. B. til Hindø under  $68^{\circ} 34'$  N. B. navnlig: 3 Linier i forskjellige Høider paa den Side af Arnø, som vender mod Kaagen, 2 Do., hver i sin Heide, paa den nordlige Side af Kaagen, 2 Do., den ene over den anden, ikke langt fra Stranden paa Renø lige



over for Karlse Kirke, 2 Do. i forskellige Høider, ikke langt fra Havfladen, paa østre Side af Langsund, 1 Do. mellem Tønsnæs og Krokvelven paa den østre Side af Tromsøund, 1 Do. paa den sydøstlige Side af den nordvest for Andsnæs liggende Kvalø, hvor der ogsaa viste sig en Klippefure, 1 Do. paa Andsnæs løbende ind af Malangenfjord, 1 Do. nær Gibostad paa vestre Side af Gisund; 1 Do., høiere, paa østre Side af Sundet, og 2 Do. paa Hindøen strax søndenfor Sandtorv.

Disse Linier se, som sagt, ud til at være horizontale; det ser ogsaa ud til at de baade med Hensyn til Antal og Høide over Havet svare mærkværdigt til hinanden paa de forskellige Steder. At man ikke overalt tæller dem i samme Antal kan nu dels komme deraf, at man paa en flygtig Gjennemreise let kommer til at overse de mindre fremtrædende, dels deraf, at det ikke blot kommer an paa Havets Stand, hverken hvor en saadan Linie bliver anlagt, eller hvor den i Tidens Længde skal kunne holde sig. Heri spille uden Tvivl flere lokale Faktorer en vigtig Rolle, saasom Havets større eller mindre Paagaahenhed paa Stedet, Klippegrundens større eller mindre Skraahed, større eller mindre Jævnhed, dens Relief over og under Havfladen, det forhaanden værende løse Materiales Mængde, Tilgangen deraf, dets Beskaffenhed, dets større eller mindre Evne til at binde sig, modstaa Bortvaskning, modtage et beskyttende Teppe af Vegetabilier o. s. v. Som Exempel paa Lokaldannelse af Strandlinier i det Smaa kan jeg anføre, at paa en Bakke, der mellem Kaafjorden og Krognæs stiger op fra Stranden til en Høide af 200 Fod, forekomme ikke færre end 9 Strandlinier. Der kan saaledes være Anledning til at spørge, om ikke en Strandlinie i løst Terrain skulde kunne fremstaa i Havets Niveau uden at dette, strængt taget, var stationært. I bekræftende Fald behøvede man ikke de mange Spring og Pauser i Landets Stigning for Strandliniernes Skyld. Man kunde da slippe ud med en langsom Stigning, uden at man behøvede

paa Forhaand at afgjøre, om denne var kontinuerlig eller afbrudt, jævn eller ujævn.

I ovenomhandlede sporadiiske Linier ville muligens Nogle finde et Argument for en sekulær Ebbe og Flod i Verdenshavet, medens Andre deri ville se et Bevis for en jævn, langsom Hævning af et Parti af Jordens faste Overflade, hvortil der kunde synes at være en fortvarende Grund, forudsat at Jordskorpen ved en langsom Afkjøling, med eller uden KrySTALLISATION indentil, bliver for trang for det ildfyldende Indre, som da selvfølgelig kom til at øve det største Totaltryk udad mod de fladtrykte Polaregne, og saaledes arbeidede paa at give Jorden en fuldkommen Kugleform. Hermed stemmer vistnok ikke, at Grønland i de sidste Aarhundreder har været i langsomt Synkende.

Hvis der gives noget Middel, ved Hjælp af hvilket man kan komme ud over dette de forskjellige Formeningers Stadium, saa maa dette Middel være, at man med den størst mulige Nøiagtighed undersøger, hvorledes Linierne ligge med Hensyn til Horizonten, og hvor høit de ligge over Havet, hvilken sidste Undersøgelse naturligvis maa gaa ud fra et bestemt Niveau nede paa Stranden, dette være nu middels Flod, middels Ebbe eller Midten mellem Begge. At bestemme dette Niveau med tilstrækkelig Nøiagtighed bliver imidlertid et Arbeide, der kræver Tid og mange Arbeidere.

I Forbindelse med Foranstaaende bringes i Erindring, at naar man paa et tilstrækkeligt Antal af hensigtsmæssigt valgte Punkter paa vor Kyst i den faste Klippe huggede Mærker i en given Vertikalafstand fra det ene eller det andet af bemeldte Niveauer, saa gav man Fremtiden et Middel, hvorved den kunde komme til Kundskab, om den gjensidige Stilling mellem Hav og Land herefter er foranderlig eller uforanderlig, og i første Fald om Forandringen til forskjellig Tid og Sted er ligestor eller ikke.

---

# THEORIE DER TRANSFORMATIONS-GRUPPEN.

## (ERSTE ABHANDLUNG)

VON

SOPHUS LIE.

In einer Reihe Abhandlungen, unter denen die nachstehende die erste ist, beabsichtige ich eine neue Theorie, die ich die *Theorie der Transformations-Gruppen* nennen werde, zu entwickeln. Die betreffenden Untersuchungen haben, wie der Leser bemerken wird, viele Berührungspunkte mit mehreren mathematischen Disciplinen, insbesondere mit der Substitutions-Theorie,<sup>1</sup> mit der Geometrie und der modernen Mannigfaltigkeitslehre,<sup>2</sup> und endlich auch mit der Theorie der Differentialgleichungen;<sup>3</sup> sie werden gewissermassen einen Zusammenhang zwischen diesen früher getrennten Disciplinen zu Stande bringen. Im Uebrigen muss ich mir es für spätere Arbeiten vorbehalten, die Wichtigkeit und Tragweite dieser neuen Theorie darzulegen.

<sup>1</sup>) Sieh *Camille Jordan's traité des substitutions*. Vergleiche auch Jordans Untersuchungen über Gruppen von Bewegungen.

<sup>2</sup>) Sieh verschiedene geometrische Arbeiten von *Klein* und mir, insbesondere eine wichtige Abhandlung von *Klein*: „*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*“, Erlangen 1872,“ die bis jetzt vielleicht nicht hinlänglich von den Mathematikern berücksichtigt worden ist.

<sup>3</sup>) Sieh meine Untersuchungen über Differential-Gleichungen.

### Abschnitt I.

#### Transformations-Gruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

In meiner jetzigen Abhandlung, die den ersten Abschnitt meiner Theorie bildet, erledige ich ein allgemeines Problem, das ich folgendermassen formulire:

*Problem.* Bestimm die allgemeinste Funktion  $f$  von  $x$  und  $r$  Parametern  $a_1 \dots a_r$ , die eine Bedingungs-Gleichung der Form

$$f(f(x, a_1, \dots, a_r), b_1, \dots, b_r) = f(x, \varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

wo die  $\varphi$  nur von den  $a$  und  $b$  abhängen, erfüllt.

Dieses Problem kann übersichtlicher ausgesprochen werden, indem man den Begriff Transformations-Gruppe, den wir sogleich definiren, anwendet.

*Def.* Eine Schaar von Transformationen

$$x' = f(x, a_1, \dots, a_r)$$

wo  $x'$  die ursprüngliche,  $x$  die neue Variable, und die  $a$  Parameter bezeichnen, bilden eine Transformations-Gruppe, wenn die Succession zweier Transformationen der Schaar mit einer einzigen Transformation derselben Schaar äquivalent ist, wenn also aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= f(x, a_1, \dots, a_r) \\ x'' &= f(x', b_1, \dots, b_r) \end{aligned}$$

hervorgeht

$$x'' = f(x, \varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

wo die  $\varphi$  Funktionen der  $a$  und  $b$  sind.

Im ganz analogen Sinne spricht man über Gruppen von Transformationen zwischen mehreren Variablen

$$x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r).$$

In dieser ersten Abhandlung setzen wir indess immer voraus, dass  $n = 1$  ist. Um dies noch scharfer hervorzuheben, sagen wir zuweilen, dass wir hier *Transformations-Gruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit* behandeln. Die

folgenden Abschnitte sind den Transformations-Gruppen einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gewidmet.

*Def. Eine Transformations-Gruppe mit  $r$  Parametern*

$$x' = f(x, a_1, \dots, a_r)$$

*soll  $r$ -gliedrig heissen, wenn  $f$  keine lineare partielle Differential-Gleichung der Form*

$$\sum_{\kappa} \Phi_{\kappa}(a_1, \dots, a_r) \frac{da_{\kappa}}{dx} = 0$$

*befriedigt, wenn es also unmöglich ist, die Zahl  $r$  durch Einführung neuer Parameter zu erniedrigen.*

Mit Anwendung dieser Terminologie lässt unser Problem sich auch folgendermassen formuliren:

*Bestimme alle  $r$ -gliedrige Transformations-Gruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.*

Es ist leicht eine allgemeine Operation anzugeben, die dazu dient, aus einer gegebenen Gruppe

$$x' = f(x, a_1, \dots, a_r)$$

neue solche herzuleiten. Bezeichnet man in der That mit  $\varphi$  und  $\Phi$  zwei beliebige inverse Funktionen, so bestimmt die Gleichung

$$x' = \Phi f(\varphi(x), a_1, \dots, a_r) = F(x, a_1, \dots, a_r)$$

wie man unmittelbar verificirt, immer eine neue Transformations-Gruppe. Dabei ist zu bemerken, dass die erste Gruppe die Form

$$x' = \varphi F(\Phi(x), a_1, \dots, a_r)$$

erhalten kann, so dass die Beziehung zwischen den beiden Gruppen eine gegenseitige ist.

*Def. Zwei Gruppen*

$$x' = f(x, a_1, \dots, a_r)$$

$$x' = F(x, a_1, \dots, a_r)$$

*heissen *ähnlich*, wenn die letzte Gruppe die Form*

$$x' = \Phi f(\varphi(x), a_1, \dots, a_r)$$

*wo  $\varphi$  und  $\Phi$  inverse Funktionen sind, annehmen kann, und also auch die erste Gruppe die Form*

$$x' = \varphi F(\Phi(x) a_1 \dots a_r)$$

erhalten kann.

### § 1.

#### Vorbereitende Entwicklungen.

Wir unterwerfen die Parameter einer  $r$ -gliedrigen Gruppe

$$x' = f(x a_1 \dots a_r)$$

der Gleichung

$$x_0 = f(x_0 a_1 \dots a_r),$$

die nicht identisch stattfinden kann, wenn  $x_0$  eine allgemeine Constante bezeichnet. Finden wir sodann durch Auflösung

$$a_r = \Psi(x_0 a_1 \dots a_r),$$

so behaupte ich, dass die Gleichung

$$x' = f(x a_1 \dots a_{r-1} \Psi) = F(x a_1 \dots a_{r-1})$$

eine  $(r-1)$ -gliedrige Transformations-Gruppe bestimmt.

Nach unserer Voraussetzung, dass  $x' = f$  eine  $r$ -gliedrige Gruppe ist, besteht nemlich eine Relation der Form.

$$F(F(x a_1 \dots a_{r-1}) b_1 \dots b_{r-1}) = f(x c_1 \dots c_r),$$

wo die  $c$  Funktionen von  $a_1 \dots a_{r-1} b_1 \dots b_{r-1}$  sind.

Und da identisch

$$F(x_0 a_1 \dots a_{r-1}) = x_0$$

ist, kommt

$$x_0 = f(x_0 c_1 \dots c_r)$$

woraus

$$f(x c_1 \dots c_r) = F(x c_1 \dots c_{r-1})$$

so dass

$$F(F(x a_1 \dots a_{r-1}) b_1 \dots b_{r-1}) = F(x c_1 \dots c_{r-1}).$$

wird, womit die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen ist. Dies giebt das folgende wichtige Theorem.

**Theorem I.** *Jede  $r$ -gliedrige Transformations-Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit enthält einfach unendlich viele  $(r-1)$ -gliedrige Untergruppen. Jede Transformation der vorgelegten Gruppe gehört einer solchen Untergruppe an.*



Indem wir diesen Satz mehreremal anwenden, erhalten wir folgendes

*Corollar. Jede r-gliedrige Transformations-Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit enthält  $\infty^{r-1}$  eingliedrige Untergruppen. Jede Transformation der vorgelegten Gruppe gehört einer solchen Untergruppe an.*

In den folgenden Paragraphen werden wir beweisen, dass jede r-gliedrige Transformations-Gruppe  $\infty^{r-1}$  infinitesimale Transformationen enthält. Hier schicken wir die folgenden Bemerkungen über infinitesimale Transformationen voraus.

Eine Transformation heisst infinitesimal, wenn sie die Form

$$x' = x + F(x) \delta t$$

besitzt, wo  $\delta t$  eine infinitesimale Grösse ist. Wir schreiben häufig die letzte Gleichung folgendermassen

$$\delta x = F(x) \delta t.$$

Zwei infinitesimale Transformationen

$$\delta x = X_1 \delta t_1, \delta x = X_2 \delta t_2$$

sind als identisch zu betrachten, wenn das Verhältniss  $X_1 : X_2$  eine Constante ist.

Lass uns voraussetzen, dass eine Transformations-Gruppe zwei unabhängige infinitesimale Transformationen

$$\delta x = X_1 \delta t_1, \delta x = X_2 \delta t_2$$

enthält. Anwenden wir nun zuerst die eine, sodann die andere Transformation, so ist diese Succession, wenn man von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung wegsieht, äquivalent mit der Transformation

$$\delta x = X_1 \delta t_1 + X_2 \delta t_2,$$

welche also unserer Gruppe angehört. Und wenn man das Verhältniss  $\delta t_1 : \delta t_2$  von 0 bis  $\infty$  variiren lässt, so erhält man  $\infty^1$  infinitesimale Transformationen, die folglich der Gruppe angehören.

Wir sagen, das r infinitesimale Transformationen

$$\delta x = X_1 \delta t_1, \dots, \delta x = X_r \delta t_r$$

von einander unabhängig sind, wenn keine Relation der Form

$$c_1 X_1 + \dots + c_r X_r = 0$$

mit constanten Coefficienten stattfindet. Enthält eine Transformations-Gruppe  $r$  solche Transformationen, so enthält sie nach den vorangehenden Entwicklungen zugleich jede infinitesimale Transformation der Form

$$\delta x = (c_1 X_1 + \dots + c_r X_r) \delta t$$

das heisst, sie besitzt  $\infty^{r-1}$  infinitesimale Transformationen.

In gewissem Sinne kann man sagen, dass die  $\infty^{r-1}$  infinitesimale Transformationen, die durch die letzte Gleichung definirt werden, wenn man überhaupt die  $X$  als gewisse Funktionen von  $x$ , die  $c$  als Constanten auffasst, eine Transformations-Gruppe bilden, insofern die Succession zweier solchen Transformationen, wenn man von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung wegsieht, mit einer einzigen Transformation derselben Schaar aequivalent ist. Da indess derartige Schaaren von Transformationen kein besonderes Interesse bieten, fügen wir zu unserer Definition des Begriffs Transformations-Gruppe noch die Forderung hinzu, dass die Transformationen der betreffenden Schaar nicht sämmtlich infinitesimal sein dürfen.

Zugefügt soll noch sein, dass wir unsere Untersuchungen auf solche Transformations-Gruppen

$$x' = f(x, a_1, \dots, a_r)$$

beschränken, deren charakteristische Funktion  $f$  für allgemeine Werthe der  $a$  und  $x$  differentiirbar ist.

## § 2.

### Die eingliedrige Gruppe.

Ist

$$x' = f(x, a) \tag{1}$$

die Definitions-Gleichung einer eingliedrigen Gruppe, das heisst, besteht eine Funktional-Relation der Form

$$f(f(x\ b)\ a) = f(x\ \varphi(a\ b)),$$

so darf  $\varphi$  keine Funktion von  $b$  allein sein. Wäre nemlich dies der Fall, so käme durch Differentiation hinsichtlich  $a$

$$\frac{d f(f, a)}{da} = 0,$$

woraus durch Integration

$$f(f, a) = F(f),$$

wo  $F$  gar nicht  $a$  sondern nur  $f$  enthielte; also wäre auch

$$f(x\ a) = F(x),$$

welche Gleichung sagen würde, dass die Gleichung (1) keine Parameter enthielte, und also keine eingliedrige Gruppe definierte. Dies giebt

*Satz 1. Ist  $f$  eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen  $x$  und  $a$ , die eine Relation der Form*

$$f(f(x\ b)\ a) = f(x\ \varphi(a\ b))$$

*erfüllt, so kann  $\varphi$  nicht allein von  $b$ , sondern muss auch von  $a$  abhängen. Durch zweckmässigen Wahl von  $a$  kann daher  $\varphi$  eine jede Funktion von  $b$  werden.*

Insbesondere können wir

$$\varphi(a\ b) = b$$

setzen. Bezeichnen wir den entsprechenden Werth von  $a$  mit  $a_0$ , so kommt

$$f(f(x\ b)\ a_0) = f(x\ b)$$

und also auch

$$f(x\ a_0) = x,$$

wo  $a_0$  offenbar von  $b$  unabhängig ist. Folglich bestimmt die Gleichung

$$x' = f(x\ a_0)$$

eine identische Transformation. Also

*Satz 2. Jede eingliedrige Gruppe enthält eine identische Transformation.*

Ferner können wir

$$\varphi(a\ b) = a_0$$

setzen. Bezeichnen wir den entsprechenden Werth von  $a$ , der von  $b$  abhängt, mit  $\beta$ , so kommt

$$f(f(x\ b)\ \beta) = f(x\ \varphi(\beta\ b)) = f(x\ a_0) = x,$$

welche Gleichung sagt, dass die Succession der beiden Transformationen

$$x' = f(x\ b) \quad \text{und} \quad x' = f(x\ \beta)$$

mit der identischen Transformation der Gruppe äquivalent ist, oder anders ausgesprochen, dass jene beiden Transformationen invers sind. Dies giebt

*Satz 3. Enthält eine eingliedrige Gruppe eine gewisse Transformation, so enthält sie auch die inverse Transformation.*

Nach Satz 2 enthält die Gruppe  $x' = f(x\ a)$  eine identische Transformation, die dem Parameterwerthe  $a_0$  entspricht. Folglich liegt die Vermuthung nah, dass die Substitution

$$a = a_0 + \omega$$

wo  $\omega$  eine infinitesimale Grösse bezeichnet, eine infinitesimale Transformation bestimmt. Dies lässt sich doch nicht mit Sicherheit schliessen, insofern es denkbar wäre, dass  $f$  für  $a = a_0$  discontinuirlich wäre. Folgendermassen sieht man in stringenter Weise, dass jede eingliedrige Gruppe eine infinitesimale Transformation enthält.

Brauchen wir  $\beta$  und  $\omega$  in derselben Bedeutung wie soeben, so kann der Ausdruck

$$f(f(x\ b)\ \beta + \omega)$$

für einen allgemeinen Werth von  $b$  oder was auf dasselbe hinauskommt, für einen allgemeinen Werth von  $\beta$  nur unendlich wenig von

$$f(f(x\ b)\ \beta) = f(x\ a_0) = x$$

verschieden sein. Daher kann die Transformation

$$x' = f(f(x\ b)\ \beta + \omega)$$

die Gestalt

$$x' = x + \omega \left[ \frac{d f(f\ a)}{da} \right]_{(a=\beta)}$$

oder

$$\delta x = \omega \left[ \frac{d f(f a)}{da} \right]_{(a=\beta)}$$

annehmen, und ist folglich infinitesimal. Da nun eine eingliedrige Gruppe nicht mehr als eine infinitesimale Transformation enthalten kann, so muss der Ausdruck

$$\left[ \frac{d f(f a)}{da} \right]_{(a=\beta)}$$

nach der Substitution  $a = \beta$  eine Funktion von  $x$  allein sein.

Hiermit ist nachgewiesen, dass die Gleichung

$$x' = f(f(x b) a),$$

und also auch die äquivalente Gleichung

$$x' = f(x \varphi(a b))$$

für einen passend gewählten Werth von  $a$  eine infinitesimale Transformation darstellt. Dies giebt

**Satz 4.** *Jede eingliedrige Gruppe  $x' = f(x a)$  enthält eine infinitesimale Transformation.*

Jetzt führe ich zuerst eine endliche Transformation

$$x' = f(x a)$$

der Gruppe aus, sodann die zugehörige infinitesimale Transformation, die ich folgendermassen schreibe

$$\delta x = X(x) \delta t.$$

Die mit dieser Succession äquivalente Transformation

$$x'' = f(x a) + X(x') \delta t$$

gehört, wissen wir, der Gruppe an, und kann daher die Form

$$x'' = f(x a + da)$$

erhalten. Und da  $f$  nur für Ausnahmewerthe von  $a$  discontinuirlich sein kann, folgt

$$X(x') \delta t = \frac{df}{da} da$$

oder wenn wir  $x'$  durch  $f$  ersetzen, und sodann mit  $da$  dividiren

$$(2) \quad \frac{df}{da} = A \cdot X(f),$$

wo  $A$  von  $x$  unabhängig ist, und folglich eine Funktion von  $a$  allein ist. Also

**Satz 5.** *Besitzt die infinitesimale Transformation der Gruppe  $x' = f(x, a)$  die Form*

$$\delta x = X(x) \delta t,$$

*so ist der Differential-Quotient von  $f$  hinsichtlich  $a$  gleich  $X(f)$ , multiplicirt mit einer Function von  $a$ .*

Die Gleichung (2) giebt durch Integration

$$\int^f \frac{df}{X(f)} = \chi(a) + \psi(x) \quad (3)$$

wo  $\chi$  und  $\psi$  gewisse Functionen der betreffenden Argumente sind. Um  $\psi$  zu bestimmen erinnern wir, dass  $f(x, a)$  für einen gewissen Werth von  $a$ , den wir wie früher  $a_0$  nennen, gleich  $x$  wird. Daher ist

$$\int^x \frac{df}{X(f)} = \chi(a_0) + \psi(x)$$

woraus durch Einsetzung in (3)

$$\int^f \frac{df}{X(f)} = \int^x \frac{df}{X(f)} + \chi(a) - \chi(a_0)$$

oder wenn wir einen neuen Parameter

$$\alpha = \chi(a) - \chi(a_0)$$

eingeführen,

$$\int^f \frac{df}{X(f)} = \int^x \frac{df}{X(f)} + \alpha.$$

Hiermit ist die charakteristische Function  $f$  der Gruppe gefunden. Also

**Satz 6.** *Gehört die infinitesimale Transformation  $\delta x = X(x) \delta t$  einer eingliedrigen Gruppe an, so ist*

$$\int^{x'} \frac{df}{X(f)} = \int^x \frac{df}{X(f)} + \alpha$$

*die Gleichung der Gruppe.*

Setzen wir

$$(4) \quad \int^x \frac{df}{X(f)} = \varphi(x),$$

so nimmt unsere Gruppe die Gestalt

$$\varphi(x') = \varphi(x) + \alpha$$

oder wenn wir mit  $\Phi$  die inverse Transformation von  $\varphi$  bezeichnen,

$$x' = \Phi(\varphi(x) + \alpha).$$

Auf der anderen Seite verificirt man unmittelbar, dass jede Gleichung dieser Form, in welcher  $\varphi$  und  $\Phi$  inverse Funktionen sind, eine eingliedrige Gruppe bestimmt. Dies giebt

*Satz 7. Die Gleichung*

$$(5) \quad \varphi(x') = \varphi(x) + \alpha,$$

*definiert immer eine Gruppe, und alle eingliedrigen Gruppen besitzen diese Form.*

Differentiiren wir Gleichung (4), kommt

$$X(x) = \frac{1}{\varphi'(x)}.$$

Also kann  $X(x)$  durch passende Bestimmung von  $\varphi(x)$  eine jede Funktion von  $x$  werden. Und da jede eingliedrige Gruppe eine infinitesimale Transformation enthält, können wir den folgenden Satz aussprechen:

*Satz 8. Jede infinitesimale Transformation*

$$\delta x = X(x) \delta t$$

*gehört einer eingliedrigen Gruppe an, nemlich der folgenden*

$$\int^{x'} \frac{dx}{X(x)} = \int^x \frac{dx}{X(x)} + a.$$

Es ist leicht zu erkennen, dass alle eingliedrigen Gruppen aehnlich sind. Führt man nemlich eine neue Variable

$$y = \varphi(x)$$

ein, so nimmt (5) die einfache Gestalt

$$y' = y + \alpha$$

an. Dies giebt

*Theorem 2. Alle eingliedrigen Transformations-Gruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit sind aehnlich. Insbesondere können sie die gemeinsame Form*

$$x' = x + a$$

*annehmen.*

## § 3.

**Sätze über die zweigliedrigen Gruppen.**

Ist

$$x' = f(x, a_1, a_2)$$

die Definitions-Gleichung einer zweigliedrigen Gruppe, das heisst, besteht eine Funktional-Relation der Form

$$f(f(x, b_1, b_2), a_1, a_2) = f(x, \varphi_1, \varphi_2) \quad (6)$$

wo

$$\varphi_k = \varphi_k(a_1, a_2, b_1, b_2),$$

so darf keine Relation zwischen  $\varphi_1, \varphi_2, b_1$  und  $b_2$  stattfinden.

Bestände nemlich eine solche Gleichung

$$\varphi_2 = W(b_1, b_2, \varphi_1)$$

so würde (6) die Form

$$f(f(x, b_1, b_2), a_1, a_2) = F(x, \varphi_1, b_1, b_2)$$

annehmen, woraus durch Differentiation

$$\frac{d f(f, a_1, a_2)}{d a_1} = \frac{d F}{d \varphi_1} \frac{d \varphi_1}{d a_1}$$

$$\frac{d f(f, a_1, a_2)}{d a_2} = \frac{d F}{d \varphi_1} \frac{d \varphi_1}{d a_2}$$

und durch Elimination von  $\frac{d F}{d \varphi_1}$

$$\frac{d f(f, a_1, a_2)}{d a_1} + \Phi(a_1, a_2) \frac{d f(f, a_1, a_2)}{d a_2} = 0$$

und endlich durch Integration

$$f(f, a_1, a_2) = \Omega(f, w(a_1, a_2)),$$

und also auch

$$f(x, a_1, a_2) = \Omega(x, w(a_1, a_2)).$$

Eine solche Form darf aber  $f$  nicht besitzen, da nach unserer Voraussetzung  $x' = f(x, a_1, a_2)$  eine zweigliedrige Gruppe sein soll.

Existirten andererseits zwei Relationen zwischen  $\varphi_1, \varphi_2, b_1$  und  $b_2$ , so würde (6) die Form

$$f(f(b_1, b_2), a_1, a_2) = F(b_1, b_2)$$

annehmen, woraus



$$\frac{d f(f a_1 a_2)}{d a_1} = 0, \quad \frac{d f(f a_1 a_2)}{d a_2} = 0$$

und durch Integration

$$f(f a_1 a_2) = \Omega(f),$$

und also auch

$$f(x a_1 a_2) = \Omega(x).$$

Eine solche Form darf  $f$  indess auch nicht besitzen, da  $x' = f(x a_1 a_2)$  eine zweigliedrige Gruppe bestimmen soll.

Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung nachgewiesen, und daher können wir den folgenden Satz aussprechen:

**Satz 9.** *Ist*

$$x' = f(x a_1 a_2)$$

*die Gleichung einer zweigliedrigen Gruppe, so dass eine Funktional-Relation der Form*

$$f(f(x b_1 b_2) a_1 a_2) = f(x \varphi_1 \varphi_2)$$

*stattfindet, wo die  $\varphi$  nur von den  $a$  und  $b$  abhängen, so kann man immer  $a_1$  und  $a_2$  derart wählen, dass  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gleich beliebig gegebenen Funktionen von  $b_1$  und  $b_2$  werden.*

Insbesondere können wir

$$\varphi_1(a_1 a_2 b_1 b_2) = b_1, \quad \varphi_2(a_1 a_2 b_1 b_2) = b_2$$

setzen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe der  $a$  mit  $a_1^0$  und  $a_2^0$ , so kommt

$$f(f(x b_1 b_2) a_1^0 a_2^0) = f(x b_1 b_2)$$

und also auch

$$f(x a_1^0 a_2^0) = x$$

wo  $a_1^0$  und  $a_2^0$  offenbar von  $b_1$  und  $b_2$  unabhängig sind. Folglich bestimmt die Gleichung

$$x' = f(x a_1^0 a_2^0)$$

eine identische Transformation. Dies giebt

**Satz 10.** *Jede zweigliedrige Gruppe enthält eine identische Transformation.<sup>1)</sup>*

<sup>1)</sup> Unser Raisonement schliesst nicht die Möglichkeit aus, dass einfach unendlich viele Werth-Systeme  $a_1, a_2$  eine identische Transformation gäben. Dass dies doch nie der Fall ist, wird später gezeigt.

Ferner können wir

$$\varphi_1(a_1, a_2, b_1, b_2) = a_1^0, \quad \varphi_2(a_1, a_2, b_1, b_2) = a_2^0$$

setzen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe der  $a$ , die offenbar von den  $b$  abhängen, mit  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , so kommt

$$f(f(x, b_1, b_2), \beta_1, \beta_2) = f(x, a_1^0, a_2^0) = x,$$

welche Gleichung sagt, dass die Succession der beiden Transformationen

$$x' = f(x, b_1, b_2) \quad \text{und} \quad x' = f(x, \beta_1, \beta_2)$$

mit der identischen Transformation der Gruppe äquivalent ist; oder anders ausgesprochen, dass jene Transformationen sich aufheben. Also

*Satz 11. Enthält eine zweigliedrige Gruppe eine gewisse Transformation, so enthält sie auch die inverse Transformation.*

Wusste man a priori, dass  $f$  für  $a_1 = a_1^0, a_2 = a_2^0$  einen Differential-Quotient hinsichtlich  $a_1$  und  $a_2$  besäße, so könnte man den Ausdruck

$$f(x, a_1^0 + \omega_1, a_2^0 + \omega_2)$$

wo  $\omega_1$  und  $\omega_2$  zwei von einander unabhängige infinitesimale Grössen bezeichnen, auf die Form

$$f(x, a_1^0, a_2^0) + \omega_1 \left[ \frac{df}{da_1} \right]_{a_1=a_1^0} + \omega_2 \left[ \frac{df}{da_2} \right]_{a_1=a_1^0}$$

bringen. Und dann enthielte die Gruppe die infinitesimale Transformation

$$\delta x = \omega_1 \left[ \frac{df}{da_1} \right]_{a_1=a_1^0} + \omega_2 \left[ \frac{df}{da_2} \right]_{a_1=a_1^0}$$

die jedenfalls der Form nach einen Parameter  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  besitzt.

Um in stringenter Weise nachzuweisen, dass jede zweigliedrige Gruppe einfach unendlich viele infinitesimale Transformationen enthält, verfährt man am besten folgendermassen. Brauchen wir  $\beta_1, \beta_2, \omega_1$  und  $\omega_2$  in derselben Bedeutung wie soeben, so kann der Ausdruck

$$f(f(x, b_1, b_2), \beta_1 + \omega_1, \beta_2 + \omega_2)$$

für allgemeine Werthe der Grössen  $b$ , oder was auf dasselbe

hinauskommt, für allgemeine Werthe der Grössen  $\beta$  auf die Form

$$f(f(x, b_1, b_2), \beta_1, \beta_2) + \sum_{k=1}^{k=2} \omega_k \left[ \frac{d f(f(a_1, a_2))}{d a_k} \right] (a_1 - \beta_1)$$

gebracht werden, wo die mit  $\omega_1$  und  $\omega_2$  multiplicirten Grössen, die wir der Kürze wegen  $Y_1$  und  $Y_2$  nennen werden, nach der Substitution  $a_1 = \beta_1$ , allein von  $x, b_1$  und  $b_2$  abhängen. Es ergibt sich in dieser Weise, dass unsere Gruppe die infinitesimale Transformation

$$\delta x = \omega_1 Y_1 + \omega_2 Y_2$$

enthält; und wir werden zeigen, dass die letzte Gleichung je nach dem Werthe des Verhältnisses  $\omega_1 : \omega_2$  einfach unendlich viele distinkte infinitesimale Transformationen darstellt. Existirte in der That eine Relation der Form

$$Y_1 + \psi(b_1, b_2) Y_2 = 0,$$

so könnte man sie, indem man nicht wie früher  $x, b_1$  und  $b_2$ , sondern  $f, \beta_1$  und  $\beta_2$  als unabhängige Variablen betrachtete, auf die Form

$$\frac{d f(f(\beta_1, \beta_2))}{d \beta_1} + \psi(\beta_1, \beta_2) \frac{d f(f(\beta_1, \beta_2))}{d \beta_2} = 0$$

bringen, woraus durch Integration

$$f(f(\beta_1, \beta_2)) = F(f, w(\beta_1, \beta_2))$$

und also auch

$$f(x, a_1, a_2) = F(x, w(a_1, a_2)).$$

folgen würde. Dies steht aber im Widerspruche mit der Annahme, dass  $x' = f(x, a_1, a_2)$  die Definitions-Gleichung einer zweigliedrigen Gruppe sein soll. In ganz entsprechender Weise erkennt man, dass  $Y_1$  und  $Y_2$  nicht beide verschwinden können, denn aus

$$\frac{d f(f(\beta_1, \beta_2))}{d \beta_1} = 0, \quad \frac{d f(f(\beta_1, \beta_2))}{d \beta_2} = 0$$

würde folgen

$$f(f(\beta_1, \beta_2)) = F(f)$$

und also auch

$$f(x, a_1, a_2) = F(x)$$

was mit der Annahme, dass unsere Gruppe zweigliedrig ist, im Widerspruche steht. Dies giebt

**Satz 12.** Jede zweigliedrige Gruppe enthält  $\infty^1$  infinitesimale Transformationen.

Jetzt führe ich zuerst eine endliche Transformation

$$x' = f(x, a_1, a_2)$$

der Gruppe aus, sodann eine beliebige unter den zugehörigen infinitesimalen Transformationen, etwa die folgende

$$\delta x = X(x) \delta t.$$

Die mit dieser Succession äquivalente Transformation

$$x'' = f(x, a_1, a_2) + X(x') \delta t$$

gehört, wissen wir, der Gruppe an und kann daher die Form

$$x'' = f(x, a_1 + da_1, a_2 + da_2)$$

erhalten. Und da  $f$  nur für Ausnahmewerthe von  $a_1$  und  $a_2$  discontinuirlich sein kann, folgt

$$X(x') \delta t = \frac{df}{da_1} da_1 + \frac{df}{da_2} da_2$$

oder, wenn wir mit  $\delta t$  dividiren, und  $x'$  durch  $f$  ersetzen

$$X(f) = M_1 \frac{df}{da_1} + M_2 \frac{df}{da_2},$$

wo  $M_1$  und  $M_2$  gewisse Funktionen von  $a_1$  und  $a_2$  sind. Also können wir den folgenden Satz aussprechen:

**Satz 13.** Gehört die infinitesimale Transformation  $\delta x = X(x) \delta t$  der zweigliedrigen Gruppe  $x' = f(x, a_1, a_2)$  an, so ist  $X(f)$  gleich der Summe von  $f$ 's Differential-Quotienten hinsichtlich  $a_1$  und  $a_2$ , multiplicirt mit gewissen Funktionen der  $a$ .

Sind

$$\delta x = X_1(x) \delta t_1, \delta x = X_2(x) \delta t_2$$

zwei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen unserer Gruppe, so bestehen also Gleichungen der Form

$$X_1(f) = M_1 \frac{df}{da_1} + M_2 \frac{df}{da_2}$$

$$X_2(f) = N_1 \frac{df}{da_1} + N_2 \frac{df}{da_2},$$

und da keine Relation der Form

$\Phi_1(a_1, a_2) X_1(f) + \Phi_2(a_1, a_2) X_2(f) = 0$   
 stattfinden darf, findet man durch Auflösung

$$\begin{aligned} \frac{df}{da_1} &= A_1 X_1(f) + A_2 X_2(f) \\ \frac{df}{da_2} &= B_1 X_1(f) + B_2 X_2(f) \end{aligned} \quad (7)$$

wo wieder die  $A$  und  $B$  nur von  $a_1$  und  $a_2$  abhängen. Dies giebt

**Satz 14.** *Sind*

$$\delta x = X_1(x) \delta t_1, \quad \delta x = X_2(x) \delta t_2$$

*zwei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe  $x' = f(x, a_1, a_2)$ , so drücken die Differential-Quotienten von  $f$  hinsichtlich  $a_1$  und  $a_2$  sich als Summen der Grössen  $X_1(f)$  und  $X_2(f)$  multiplicirt mit gewissen Functionen der  $a$  aus.*

#### § 4.

##### Allgemeine Form der zweigliedrigen Gruppen.

Der vorstehende Satz giebt die Grundlage für die Bestimmung der allgemeinen Form der zweigliedrigen Gruppen.

Die Function  $f$  befriedigt die Gleichungen (7); und da  $f$  nicht allein von den  $a$ , sondern auch von  $x$  abhängt, so müssen jene Gleichungen die bekannte Integrabilitäts-Bedingung, die in diesem Falle die Form

$$\begin{aligned} (A_2 B_1 - A_1 B_2) (X_1 X_2' - X_2 X_1') + \\ \left( \frac{dA_1}{da_2} - \frac{dB_1}{da_1} \right) X_1 + \left( \frac{dA_2}{da_2} - \frac{dB_2}{da_1} \right) X_2 = 0 \end{aligned}$$

annimmt, erfüllen.

Diese Relation lässt sich in mehrere zerlegen. Wir bemerken zunächst, dass die Determinante  $A_2 B_1 - A_1 B_2$  von Null verschieden sein muss; sonst nemlich existirte wegen (7) eine Relation der Form

$$\Phi_1(a_1, a_2) \frac{df}{da_1} + \Phi_2(a_1, a_2) \frac{df}{da_2} = 0$$

woraus die unmögliche Gleichung

$$f = F(x, w(a_1, a_2))$$

folgen würde.

Dividieren wir daher unsere Integrabilitäts-Bedingung mit  $A_2 B_1 - A_1 B_2$ , kommt

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = m_1 X_1 + m_2 X_2 \quad (8)$$

wo

$$\begin{aligned} m_1 &= \left( \frac{dA_1}{da_2} - \frac{dB_1}{da_1} \right) : (A_1 B_2 - A_2 B_1) \\ m_2 &= \left( \frac{dA_2}{da_2} - \frac{dB_2}{da_1} \right) : (A_1 B_2 - A_2 B_1) \end{aligned} \quad (9)$$

und da die linke Seite der Gleichung (8) wie auch  $X_1$  und  $X_2$  nur von  $x$  abhängen, so müssen  $m_1$  und  $m_2$  Constanten sein. Zu bemerken ist noch, dass  $m_1$  und  $m_2$  nicht beide gleich Null sein dürfen, denn aus  $X_1 X_2' - X_2 X_1' = 0$  würde folgen

$$X_1 = \text{Const. } X_2,$$

was mit unserer Voraussetzung, dass unsere beiden infinitesimalen Transformationen von einander unabhängig sind, im Widerspruche steht. Also

*Satz 15. Sind  $\delta x = X_1(x) \delta t_1$  und  $\delta x = X_2(x) \delta t_2$  zwei unabhängige infinitesimale Transformationen einer zweigliedrigen Gruppe, so ist*

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = m_1 X_1 + m_2 X_2 \quad (8)$$

wo  $m_1$  und  $m_2$  Constanten sind, unter denen jedenfalls die eine von Null verschieden ist.

Durch zweckmässigen Wahl der beiden infinitesimalen Transformationen kann die eben gefundene Relation eine noch einfachere Gestalt erhalten. Man setze in der That, wenn etwa  $m_1$  von Null verschieden ist,

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 = Y_1, \quad \frac{1}{m_1} X_2 = Y_2;$$

alsdann sind die beiden infinitesimalen Transformationen

$$\delta x = Y_1 d\tau_1, \quad \delta x = Y_2 d\tau_2$$

von einander unabhängig, und gehören dabei unserer Gruppe

an. Und zwischen ihnen besteht, wie man durch Einführung von  $Y_1$  und  $Y_2$  in (8) findet, die Relation

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = Y_1.$$

Also können wir den folgenden Satz aussprechen:

**Satz 16.** *Unter den  $\infty^1$  infinitesimalen Transformationen einer zweigliedrigen Gruppe giebt es immer zwei solche  $dx = X_1 \delta t_1, \delta x = X_2 \delta t_2$ , dass  $X_1 X_2' - X_2 X_1'$  gleich  $X_1$  ist.*

Indem wir zwei solche infinitesimale Transformationen anwenden, können wir in die Gleichungen (9) die Substitution

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 0$$

machen. In dieser Weise finden wir

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{da_2} - \frac{dB_1}{da_1} &= A_1 B_2 - A_2 B_1, \\ \frac{dA_2}{da_2} &= \frac{dB_2}{da_1} \end{aligned}$$

und durch Integration der letzten Gleichung

$$A_2 = \frac{d\Phi}{da_1}, \quad B_2 = \frac{d\Phi}{da_2},$$

wo  $\Phi$  eine arbiträre Funktion von  $a_1$  und  $a_2$  bezeichnet.

Hierdurch nimmt die erste Gleichung die Form

$$\frac{dA_1}{da_2} - A_1 \frac{d\Phi}{da_2} = \frac{dB_1}{da_1} - B_1 \frac{d\Phi}{da_1}$$

und durch Multiplication mit  $e^{-\Phi}$

$$\frac{d}{da_2} (A_1 e^{-\Phi}) = \frac{d}{da_1} (B_1 e^{-\Phi}),$$

woraus

$$A_1 = e^{\Phi} \frac{dU}{da_1}, \quad B_1 = e^{\Phi} \frac{dU}{da_2},$$

wo  $U$  eine andere arbiträre Funktion der  $a$  ist. Dabei ist zu bemerken, dass keine Relation der Form

$$\Omega(\Phi U) = 0$$

bestehen darf, indem sonst die Determinante  $(A_1, B_2)$  verschwinden würde.

Führt man die gefundenen Werthe in (7) ein, kommt

$$\frac{df}{da_1} = e^{\Phi} \frac{dU}{da_1} X_1(f) + \frac{d\Phi}{da_1} X_2(f)$$

$$\frac{df}{da_2} = e^{\Phi} \frac{dU}{da_2} X_1(f) + \frac{d\Phi}{da_2} X_2(f).$$

Um diese Relationen zu vereinfachen, versuchen wir statt  $a_1$  und  $a_2$  neue Parameter  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  einzuführen. Alsdann wird, wie man aus der bekannten Formel

$$\frac{df}{d\alpha_1} = \frac{df}{da_1} \frac{da_1}{d\alpha_1} + \frac{df}{da_2} \frac{da_2}{d\alpha_1}$$

findet

$$\frac{df}{d\alpha_1} = e^{\Phi} \frac{dU}{d\alpha_1} X_1(f) + \frac{d\Phi}{d\alpha_1} X_2(f)$$

$$\frac{df}{d\alpha_2} = e^{\Phi} \frac{dU}{d\alpha_2} X_1(f) + \frac{d\Phi}{d\alpha_2} X_2(f).$$

Wählen wir insbesondere

$$\alpha_2 = e^{\Phi}, \alpha_1 = e^{\Phi} \cdot U,$$

kommt

$$\frac{df}{d\alpha_1} = X_1(f), \frac{df}{d\alpha_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} X_1(f) + \frac{1}{\alpha_2} X_2(f).$$

Hier führen wir den Werth von  $X_2$ , den wir durch Integration der Gleichung  $X_1 X_2' - X_2 X_1' = X_1$  erhalten,

$$X_2 = X_1(f) \int \frac{df}{X_1(f)}$$

hinein, und finden so

$$\frac{df}{d\alpha_1} = X_1(f), \frac{df}{d\alpha_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} X_1(f) + \frac{1}{\alpha_2} X_1(f) \int \frac{df}{X_1(f)}$$

Integriert man hier nach gewöhnlichen Regeln, indem man

$$\int \frac{df}{X_1(f)}$$

als die gesuchte Funktion betrachtet, kommt

$$\int^f \frac{df}{X_1(f)} = \alpha_1 + \alpha_2 \Theta(x).$$

Um die arbiträre Funktion  $\Theta(x)$  zu bestimmen, giebt man den Parametern solche Werthe  $\alpha_1^0, \alpha_2^0$ , dass

$$f(x, \alpha_1^0, \alpha_2^0) = x$$



wird, und findet so

$$\int^x \frac{dx}{X_1(x)} = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 \cdot \Theta(x)$$

und durch Elimination von  $\Theta(x)$

$$\int^f \frac{df}{X_1(f)} = \frac{\alpha_1 \alpha_2^0 - \alpha_2 \alpha_1^0}{\alpha_2^0} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2^0} \int^x \frac{dx}{X_1(x)}$$

oder wenn man

$$a_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2^0 - \alpha_2 \alpha_1^0}{\alpha_2^0}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2^0}$$

als neue Parameter einführt:

$$\int^f \frac{df}{X_1(f)} = a_1 + a_2 \int^x \frac{dx}{X_1(x)}.$$

Führt man endlich  $x'$  statt  $f$  ein, so findet man die Definitionsgleichung der Gruppe

$$\int^{x'} \frac{dx'}{X_1(x')} = a_1 + a_2 \int^x \frac{dx}{X_1(x)},$$

womit folgender Satz bewiesen ist.

*Satz 17. Gehören die beiden infinitesimalen Transformationen*

$$\delta x = X_1(x) \delta t_1, \quad \delta x = X_2(x) \delta t_2$$

*einer zweigliedrigen Gruppe an, und hat dabei die zwischen  $X_1$  und  $X_2$  stattfindende Relation die Form.*

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = X_1,$$

*so ist*

$$\int^{x'} \frac{dx}{X_1(x)} = a_1 + a_2 \int^x \frac{dx}{X_1(x)}$$

*die Gleichung der Gruppe.*

Setzen wir

$$\int^x \frac{\delta x}{X_1(x)} = \varphi(x) \quad (10)$$

und bezeichnen mit  $\Phi$  die inverse Funktion von  $\varphi$ , so nimmt unsere Gruppe die Gestalt

$$x' = \Phi(a_1 + a_2 \varphi(x)).$$

Auf der anderen Seite verificirt man unmittelbar, dass jede Gleichung dieser Form, in welcher  $\varphi$  und  $\Phi$  inverse

Funktionen bezeichnen, eine zweigliedrige Gruppe bestimmt. Dies giebt

Satz 18. *Die Gleichung*

$$\varphi(x') = a_1 + a_2 \varphi(x) \quad (11)$$

*bestimmt immer eine zweigliedrige Gruppe, und alle zweigliedrigen Gruppen können auf diese Form gebracht werden.*

Die identische Transformation der Gruppe (11) wird offenbar erhalten, wenn man

$$a_1 = 0, a_2 = 1$$

setzt. Geben wir nun  $a_1$  und  $a_2$  unendlich benachbarte Werthe

$$a_1 = \omega_1, a_2 = 1 + \omega_2,$$

so erhält man die Transformation

$$\varphi(x') = \varphi(x) + \omega_1 + \omega_2 \varphi(x),$$

die offenbar die Form

$$\delta x = \frac{\omega_1}{\varphi'(x)} + \omega_2 \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$$

annehmen kann, und daher infinitesimal ist; giebt man dem Verhältnisse  $\omega_1 : \omega_2$  successiv verschiedene Werthe, so erhält man alle  $\infty'$  infinitesimale Transformationen der Gruppe. Also

Satz 19. *Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe*

$$\varphi(x') = a_1 + a_2 \varphi(x)$$

*werden bestimmt durch die Gleichung*

$$\delta x = \frac{\delta t_1}{\varphi'(x)} + \delta t_2 \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}.$$

Ich betrachte nun zwei infinitesimale Transformationen

$$(12) \quad \delta x = X_1(x) \delta t_1, \quad \delta x = X_2(x) \delta t_2$$

die in solcher Beziehung stehen, dass

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = X_1$$

und also

$$X_2 = X_1 \int \frac{dx}{X_1}$$

ist. Ich wähle eine solche Funktion  $\psi(x)$ , dass

$$\frac{1}{\psi'(x)} = X_1$$

und also

$$\frac{\psi(x)}{\psi'(x)} = X_2$$

ist. Alsdann gehören nach dem vorangehenden Satze unsere beiden infinitesimalen Transformationen (12) der Gruppe

$$\psi(x') = a_1 + a_2 \psi(x)$$

an. Dies giebt

*Satz 20. Stehen die beiden infinitesimalen Transformationen*

$$\delta x = X_1(x) \delta t_1, \quad \delta x = X_2(x) \delta t_2,$$

*in solcher gegenseitigen Beziehung, dass*

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = X_1$$

*ist, so gehören sie einer zweigliedrigen Gruppe an.*

Dieser Satz lässt sich verallgemeinern. Stehen in der That zwei Funktionen von  $x$ :  $X_1$  und  $X_2$  in der Beziehung

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = m_1 X_1 + m_2 X_2,$$

wo  $m_1$  und  $m_2$  Constanten sind, unter denen jedenfalls die eine etwa  $m_1$  von null verschieden ist, so ist, wenn wir

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 = Y_1, \quad \frac{1}{m_1} X_2 = Y_2$$

setzen,

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = Y_1.$$

Also können wir den folgenden Satz aussprechen:

*Satz 21. Sind*

$$\delta x = X_1(x) \delta t_1, \quad \delta x = X_2(x) \delta t_2,$$

*zwei infinitesimale Transformationen, die in solcher Beziehung stehen, dass*

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = m_1 X_1 + m_2 X_2$$

*ist, wo  $m_1$  und  $m_2$  Constanten sind, unter denen jedenfalls die eine von Null verschieden ist, so gehören unsere infinitesimalen Transformationen einer gewissen zweigliedrigen Gruppe an.*

Die Gruppe

$$\varphi(x') = a_1 + a_2 \varphi(x)$$

nimmt, wenn wir eine neue Variable

$$y = \varphi(x)$$

eingeführen, die einfache Gestalt

$$y' = a_1 + a_2 y$$

an. Dies giebt

*Theorem 3. Alle zweigliedrigen Gruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit sind ähnlich. Insbesondere können sie die gemeinsame Form*

$$x' = a_1 + a_2 x$$

*annehmen. Die einfach unendlich vielen infinitesimalen Transformationen der Gruppe sind definirt durch*

$$\delta x = \omega_1 + \omega_2 x$$

*wo  $\omega_1$  und  $\omega_2$  beliebige infinitesimale Grössen bezeichnen.*

## § 5.

### Einfachere Bestimmung der zweigliedrigen Gruppen.

Ich werde jetzt zeigen, wie man, indem man Theorem 1 zu Hülfe nimmt, durch einfachere Rechnungen die allgemeine Form der zweigliedrigen Gruppen bestimmen kann.

Ist

$$x' = f(x, a_1, a_2)$$

eine zweigliedrige Gruppe, und giebt die Gleichung

$$x_0 = f(x_0, a_1, a_2)$$

aufgelöst hinsichtlich  $a_2$

$$a_2 = \psi(x_0, a_1),$$

so bestimmt nach dem eben citirten Theoreme (sieh den Beweis des Theorems I) die Gleichung

$$x' = f(x, a_1, \psi(x_0, a_1)) = F(a_1, x_0),$$

in welcher  $x_0$  als Constante betrachtet wird, eine eingliedrige Untergruppe. Wir bemerken, dass  $x_0$  nothwendigerweise in  $\psi$  und also auch in  $F$  eingehen muss, indem sonst  $f(x, a_1, a_2)$

die Form  $x + w(a_1, a_2)$  besäße. Fasst man daher in  $F$  sowohl  $x_0$  wie  $a_1$  als Parameter auf, so ist

$$x' = F(x, a_1, x_0)$$

eine neue Form der zweigliedrigen Gruppe.

Daher kann die Bestimmung der allgemeinen Form der zweigliedrigen Gruppe in der Weise geschehen, dass man die allgemeine Form der einfach unendlich vielen eingliedrigen Untergruppen

$$x' = F(x, a_1, x_0)$$

sucht, und hinterher die beiden Parameter als gleichberechtigt auffasst.

Jede eingliedrige Untergruppe enthält (Satz 4) eine infinitesimale Transformation, die eo ipso der zweigliedrigen Gruppe angehört. Und da eine eingliedrige Gruppe durch ihre infinitesimale Transformation völlig bestimmt ist, schließen wir

*Satz 22. Jede unter den einfach unendlich vielen infinitesimalen Transformationen einer zweigliedrigen Gruppe gehört einer durch sie bestimmten eingliedrigen Untergruppe an.*

Wir entnehmen nun den früheren Entwicklungen den Satz, dass jede zweigliedrige Gruppe zwei infinitesimale Transformationen

$$\delta x = X_1 \delta t_1, \delta x = X_2 \delta t_2$$

enthält, die in der Beziehung

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = X_1$$

stehen, so dass

$$X_2 = X_1 \int \frac{dx}{X_1}$$

ist. In Folge dessen besitzt die allgemeine infinitesimale Transformation der betreffenden Gruppe die Form

$$\delta x = (\lambda X_1 + X_1 \int \frac{dx}{X_1}) dt = Y \delta t,$$

und die zugehörige eingliedrige Gruppe wird nach Satz 8 definiert durch die Gleichung

$$\int^{x'} \frac{dx}{Y(x)} - \int^x \frac{dx}{Y(x)} + a$$

oder da

$$\int \frac{dx}{\lambda X_1 + X_2} - \log (\lambda_1 + \lambda_2 \int \frac{dx}{X_1})$$

ist, durch die äquivalente Gleichung

$$\int^{x'} \frac{dx}{X_1} - e^a \int^x \frac{dx}{X_1} + \lambda (e^a - 1).$$

Fasst man hier  $a$  und  $\lambda$  als gleichberechtigte Parameter auf, so bestimmt die letzte Gleichung die zweigliedrige Gruppe selbst. Und führt man

$$a_1 = \lambda(e^a - 1) \quad \text{und} \quad a_2 = e^a$$

als neue Parameter ein, so erhält unsere Definitions-Gleichung die im vorigen Paragraphen gefundene Form

$$\int^{x'} \frac{dx}{X_1} = a_1 + a_2 \int^x \frac{dx}{X_1}.$$

Ehe wir die zweigliedrigen Gruppen verlassen, bestimmen wir alle zweigliedrigen Gruppen, an denen eine vorgelegte infinitesimale Transformation

$$\delta x = X_1 \delta t_1$$

angehören kann. Ist

$$\delta x = X_2 \delta t_2$$

eine weitere infinitesimale Transformation einer solchen Gruppe, so ist, wissen wir

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = m_1 X_1 + m_2 X_2.$$

Ist hier  $m_2 = 0$ , so ersetzen wir  $X_2$  durch  $\frac{1}{m_1} X_2$  und erhalten so die einfachere Bedingungs-Gleichung

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = X_1$$

woraus

$$X_2 = X_1 \int \frac{dx}{X_1},$$

und die betreffende Gruppe ist

$$\int^{x'} \frac{dx}{X_1} = a_2 \int^x \frac{dx}{X_1} + a_1.$$

Ist dagegen  $m_2$  verschieden von Null, so können wir unsere Bedingungs-Gleichung auf die Form

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = m_2 X_2$$

bringen, woraus

$$X_2 = X_1^u, \text{ wo } u = \int \frac{m dx}{X_1},$$

und die betreffende Gruppe ist

$$\int^{x'} \frac{dx}{X_2} = a_2 \int^x \frac{dx}{X_2} + a_1.$$

### § 6.

#### Sätze über die dreigliedrigen Gruppen.

Ist

$$x' = f(x, a_1, a_2, a_3)$$

eine dreigliedrige Gruppe und besteht also eine Funktional-Relation der Form

$$f(f(x, b_1, b_2, b_3), a_1, a_2, a_3) = f(x, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad (13)$$

wo

$$\varphi_k = \varphi_k(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$$

so darf keine Relation zwischen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, b_1, b_2, b_3$  stattfinden.

Bestände nämlich eine solche

$$\varphi_3 = w(b_1, b_2, b_3, \varphi_1, \varphi_2),$$

so würde (13) die Form

$$f(f(x, b_1, b_2, b_3), a_1, a_2, a_3) = F(x, b_1, b_2, b_3, \varphi_1, \varphi_2)$$

annehmen, woraus durch Differentiation

$$\frac{d f(f(a_1, a_2, a_3))}{d a_1} = \frac{d F}{d \varphi_1} \frac{d \varphi_1}{d a_1} + \frac{d F}{d \varphi_2} \frac{d \varphi_2}{d a_1}$$

und durch Elimination der beiden Differential-Quotienten von  $F$

$$\Sigma_1 \varphi_1(a_1, a_2, a_3) \frac{d f(f(a_1, a_2, a_3))}{d a_1} = 0, \quad (14)$$

und endlich durch Integration

$f(f a_1 a_2 a_3) = \Omega(x w_1(a_1 a_2 a_3) w_2(a_1 a_2 a_3))$   
und also auch

$$f(x a_1 a_2 a_3) = \Omega(x w_1 w_2).$$

Eine solche Form darf aber  $f$  nicht besitzen, da nach unserer Voraussetzung  $x' = f(x a_1 a_2 a_3)$  eine dreigliedrige Gruppe sein soll.

Existierten zwei Relationen zwischen den  $\varphi$  und  $b$ , so würde (13) die Form

$$f(f(x b_1 b_2 b_3) a_1 a_2 a_3) = F(x b_1 b_2 b_3 \varphi_1)$$

annehmen. Differentiirte man daher hinsichtlich der  $a$ , so würde man durch Elimination von  $\frac{dF}{d\varphi_1}$  zwei Gleichungen der Form (14) erhalten. In Folge dessen würde

$$f(f a_1 a_2 a_3) = \Omega(x w(a_1 a_2 a_3))$$

und also auch

$$f(x a_1 a_2 a_3) = \Omega(x w)$$

sein, was wieder mit unserer Annahme, dass die Gleichung  $x' = f(x a_1 a_2 a_3)$  eine dreigliedrige Gruppe bestimmen soll, in Widerspruche steht.

Existierten endlich drei Relationen zwischen den  $\varphi$  und  $b$ , so würde (13) die Gestalt

$$f(f(x b_1 b_2 b_3) a_1 a_2 a_3) = F(x b_1 b_2 b_3)$$

annehmen, woraus

$$\frac{df(f a_1 a_2 a_3)}{da_1} = 0$$

und

$$f(f a_1 a_2 a_3) = \Omega(f)$$

und also auch

$$f(x a_1 a_2 a_3) = \Omega(x),$$

was wieder unmöglich ist.

Hiermit ist die Wahrheit unserer Behauptung nachgewiesen, und daher können wir den folgenden Satz aussprechen:

*Satz 23. Ist*

$$x' = f(x a_1 a_2 a_3)$$



die Gleichung einer dreigliedrigen Gruppe, so dass eine Relation der Form

$$f(f(x, b_1, b_2, b_3), a_1, a_2, a_3) = f(x, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

stattfindet, wo die  $\varphi$  nur von den  $a$  und  $b$  abhängen, so kann man immer die  $a$  derart wählen, dass die  $\varphi$  gleich beliebig gegebenen Funktionen der  $b$  werden.

Insbesondere können wir

$$\varphi_1(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = b_1$$

setzen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe der  $a$  bez. mit  $a_1^0, a_2^0, a_3^0$ , so kommt

$$f(f(x, b_1, b_2, b_3), a_1^0, a_2^0, a_3^0) = f(x, b_1, b_2, b_3)$$

und also auch

$$f(x, a_1^0, a_2^0, a_3^0) = x,$$

wo  $a_1^0, a_2^0, a_3^0$  offenbar von den  $b$  unabhängig sind. Folglich bestimmt die Gleichung

$$x' = f(x, a_1^0, a_2^0, a_3^0)$$

eine identische Transformation. Dies giebt

**Satz 24.** *Jede dreigliedrige Gruppe enthält eine identische Transformation.*

Ferner können wir

$$\varphi_1(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = a_1^0$$

setzen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe der  $a$ , die von den  $b$  abhängen, bez. mit  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , so kommt

$$f(f(x, b_1, b_2, b_3), \beta_1, \beta_2, \beta_3) = f(x, a_1^0, a_2^0, a_3^0) = x,$$

welche Gleichung sagt aus, dass die Succession der beiden Transformationen

$$x' = f(x, b_1, b_2, b_3) \text{ und } x' = f(x, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

mit der identischen Transformation der Gruppe äquivalent ist, dass also jene Transformationen sich aufheben. Dies giebt

**Satz 25.** *Enthält eine dreigliedrige Gruppe eine gewisse Transformation, so enthält sie auch die inverse Transformation.*

Wusste man a priori, dass die Funktion  $f$  für  $a_1 = a_1^0, a_2 = a_2^0, a_3 = a_3^0$  bestimmte endliche Differential-Quotienten hinsichtlich der  $a$  besäße, so könnte man den Ausdruck

$$f(x \, a_1^0 + \omega_1 \dots a_3^0 + \omega_3)$$

wo die  $\omega$  drei unabhängige infinitesimale Grössen bezeichnen, auf die Form

$$f(x \, a_1^0 \, a_2^0 \, a_3^0) + \sum_1 \omega_1 \left[ \frac{df}{da_1} \right]_{(a_k = a_k^0)}$$

bringen. Und dann enthielte die Gruppe die infinitesimale Transformation

$$\delta x = \sum_1 \omega_1 \left[ \frac{df}{da_1} \right]_{(a_k = a_k^0)}$$

die jedenfalls anscheinend zwei Parameter  $\omega_1 : \omega_3$ , und  $\omega_2 : \omega_3$  besitzt.

Um in stringenter Weise nachzuweisen, dass jede dreigliedrige Gruppe  $\infty^3$  infinitesimale Transformationen enthält, verfährt man am besten folgendermassen: Brauchen wir  $\beta_1 \dots \beta_3 \, \omega_1 \dots \omega_3$  in derselben Bedeutung wie soeben, so kann der Ausdruck

$$f(f(x \, b_1 \, b_2 \, b_3) \, \beta_1 + \omega_1 \dots \beta_3 + \omega_3)$$

für allgemeine Werthe der  $b$ , oder was auf dasselbe hinauskommt, für allgemeine Werthe der  $\beta$  auf die Form

$$f(f \, \beta_1 \, \beta_2 \, \beta_3) + \sum_k \omega_k \left[ \frac{d f(f \, a_1 \, a_2 \, a_3)}{da_k} \right]_{(a_i = \beta_i)}$$

gebracht werden, wo die mit den  $\omega_k$  multiplicirten Grössen, die wir der Kürze wegen  $Y_1, Y_2$  und  $Y_3$  nennen werden, nach der Substitution  $a_k = \beta_k$ , allein von  $x$  und den  $b$  abhängen. In dieser Weise ergibt sich, dass unsere Gruppe die infinitesimale Transformation

$$\delta x = \omega_1 Y_1 + \omega_2 Y_2 + \omega_3 Y_3$$

enthält; und wir werden zeigen, dass die letzte Gleichung je nach den relativen Werthen der Infinitesimalen  $\omega_1 \dots \omega_3$  zweifach unendlich viele infinitesimale Transformationen darstellt. Existirte in der That eine Relation der Form

$$\sum_k \Phi_k(b_1, b_2, b_3) Y_k = 0, \quad (15)$$

so könnte man sie, indem man  $f, \beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  als unabhängige Variablen anstatt  $x, b_1, b_2$  und  $b_3$  einführte, auf die Form

$$\sum \Psi_k (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{df(f\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{d\beta_k} = 0$$

bringen, woraus durch Integration

$$f(f\beta_1, \beta_2, \beta_3) = F(fw_1(\beta), w_2(\beta))$$

und also

$$f(x a_1, a_2, a_3) = F(fw_1, w_2),$$

was mit der Annahme, dass  $x' = f(x a_1, a_2, a_3)$  eine dreigliedrige Gruppe ist, im Widerspruche steht. — Folglich können auch nicht zwei oder drei Relationen der Form (15) bestehen. Dies giebt

**Satz 26.** *Jede dreigliedrige Gruppe enthält  $\infty^2$  infinitesimale Transformationen.*

Jetzt führe ich zuerst eine endliche Transformation

$$x' = f(x a_1, a_2, a_3)$$

der Gruppe aus, sodann eine beliebige unter den zugehörigen infinitesimalen, etwa die folgende

$$\delta x = X(x) \delta t.$$

Die mit dieser Succession äquivalente Transformation

$$x'' = f(x a_1, a_2, a_3) + X(x') \delta t$$

gehört, wissen wir, der Gruppe an, und kann daher die Form

$$x'' = f(x a_1 + da_1 \dots a_3 + da_3)$$

erhalten. Und da  $f$  nur für Ausnahmewerthe der  $a$  discontinuirlich sein kann, folgt

$$X(x') \delta t = \sum \frac{df}{da_k} da_k$$

oder wenn wir mit  $\delta t$  dividiren und  $x'$  durch  $f$  ersetzen

$$X(f) = \sum M_k(a_1, a_2, a_3) \frac{df}{da_k}$$

Also können wir den folgenden Satz aussprechen:

**Satz 27.** *Gehört die infinitesimale Transformation  $\delta x = X(x) \delta t$  der dreigliedrigen Gruppe  $x' = f(x a_1, a_2, a_3)$ , so drückt  $X(f)$  sich aus als Summe der Differentialquotienten von  $f$  hinsichtlich der  $a$ , multiplicirt mit gewissen Funktionen von  $a_1, a_2$  und  $a_3$ .*

Sind

$$\delta x = X_1 \delta t_1, \quad \delta x = X_2 \delta t_2, \quad \delta x = X_3 \delta t_3,$$

drei unabhängige infinitesimale Transformationen unserer Gruppe, so bestehen also drei Gleichungen der Form

$$X_1(f) = \sum_k M_{1k}(a_1, a_2, a_3) \frac{df}{da_k}$$

und da keine Relation der Form

$$\sum_i \Phi_i(a_1, a_2, a_3) X_i = 0$$

stattfinden darf, findet man durch Auflösung

$$\frac{df}{da_1} = A_1 X_1(f) + B_1 X_2(f) + C_1 X_3(f),$$

wo wieder die  $A, B, C$  nur von  $a_1, a_2$  und  $a_3$  abhängen. Dies giebt

**Satz 28.** Sind

$$\delta x = X_1 \delta t_1 \dots \delta x = X_3 \delta t_3$$

drei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der dreigliedrigen Gruppe  $x' = f(x, a_1, a_2, a_3)$ , so drücken die Differential-Quotienten von  $f$  hinsichtlich der  $a$  sich als Summe der Grössen  $X_1(f)$ ,  $X_2(f)$  und  $X_3(f)$ , multiplicirt mit gewissen Functionen der  $a$  aus.

## § 7.

### Allgemeine Form der dreigliedrigen Gruppen.

Der vorangehende Satz dient uns zur Grundlage für die Bestimmung der allgemeinen Form der dreigliedrigen Gruppe  $x' = f(x, a_1, a_2, a_3)$ .

Die Funktion  $f$  genügt nach diesem Satze drei Gleichungen der Form

$$\frac{df}{da_1} = A_1 X_1(f) + B_1 X_2(f) + C_1 X_3(f)$$

welche die bekannten Integrabilitäts-Bedingungen erfüllen müssen, insofern  $f$  die Grösse  $x$ , die in  $A_1, B_1, C_1$  gar nicht vorkommt, enthalten soll. In dieser Weise findet man, indem man der Kürze wegen

$$A_i B_k - A_k B_i = (A_i B_k)$$

$$X_i X'_k - X_k X'_i = [X_i X_k]$$

setzt, drei Bedingungs-Gleichungen der Form

$$(A_i B_k) [X_i X_j] + (B_i C_k) [X_j X_i] + (C_i A_k) [X_j X_1] + \\ \left(\frac{dA_k}{da_i} - \frac{dA_i}{da_k}\right) X_1 + \left(\frac{dB_k}{da_i} - \frac{dB_i}{da_k}\right) X_2 + \left(\frac{dC_k}{da_i} - \frac{dC_i}{da_k}\right) X_3 = 0,$$

wo  $i$  und  $k$  zwei beliebige unter den Zahlen 1, 2 und 3 sind.

Da nun die Determinante

$$\begin{vmatrix} (B_2 C_3) (C_2 A_3) (A_2 B_3) \\ (B_3 C_1) (C_3 A_1) (A_3 B_1) \\ (B_1 C_2) (C_1 A_2) (A_1 B_2) \end{vmatrix}$$

gleichzeitig mit der einfacheren Determinante

$$(A_1 B_2 C_3)$$

verschwindet, und diese letzte von Null verschieden sein muss, indem sonst eine Relation der Form

$$\sum x \Pi_x(a_1, a_2, a_3) \frac{df}{da_x} = 0$$

stattfände, und daher

$$f = F(x, w_1(a_1, a_2, a_3), w_2(a_1, a_2, a_3))$$

wäre, so können wir unsere drei Bedingungs-Gleichungen hinsichtlich der Grössen  $[X_i X_k]$  auflösen

$$\begin{aligned} [X_1 X_2] &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \\ (16) \quad [X_2 X_3] &= \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \\ [X_3 X_1] &= \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 \end{aligned}$$

Hier sind die Grössen  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , die sich zunächst als Funktionen der  $a$  darbieten, absolute Constanten, indem die Ausdrücke  $[X_i X_k]$  gar nicht die  $a$  enthalten. Also

*Satz 29. Sind*

$$\delta x = X_1 \delta t_1, \quad \delta x = X_2 \delta t_2, \quad \delta x = X_3 \delta t_3$$

*drei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen einer dreigliedrigen Gruppe, so drückt jedes  $[X_i X_k]$  sich als Summe von  $X_1, X_2$  und  $X_3$ , multiplicirt mit Constanten aus.*

Um die Constanten  $\alpha_i, \beta_i$  und  $\gamma_i$  zu bestimmen, bemerken wir, dass die Gleichung

$[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0$   
 identisch stattfindet. Anwenden wir daher die Gleichungen  
 (16) zweimal, so kommt eine Relation der Form

$$D_1 X_1 + D_2 X_2 + D_3 X_3 = 0$$

woraus

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 = \beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1 + \gamma_1 \beta_3 - \gamma_3 \beta_1, \\ D_2 &= 0 = \gamma_2 \beta_3 - \gamma_3 \beta_2 + \alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2, \\ D_3 &= 0 = \alpha_3 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_3 + \beta_3 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_3, \end{aligned} \quad (17)$$

Unsere dreigliedrige Gruppe enthält zweigliedrige Untergruppen, deren jede zwei infinitesimale Transformationen enthält, die eo ipso der dreigliedrigen Gruppe angehören.

Seien insbesondere

$$\delta x = X_1 \delta t_1, \quad \delta x = X_2 \delta t_2$$

infinitesimale Transformationen einer solchen Untergruppe, die derart gewählt sind, dass

$$[X, X_2] = X_1$$

ist. Alsdann ist

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.$$

Diese Werthe setzen wir in (17) ein, und finden so

$$\gamma_3 = 0, \quad \beta_2 = \gamma_1 \beta_3, \quad \gamma_2(\beta_3 - 1) = 0$$

Wäre nun  $\gamma_2 = 0$ , so käme

$$[X_1, X_3 + \gamma_1 X_2] = 0$$

woraus

$$X_3 + \gamma_1 X_2 = \text{Const. } X_1,$$

welche Gleichung mit unserer Annahme, dass unsere infinitesimalen Transformationen unabhängig sind, im Widerspruche steht. Folglich muss  $\gamma_2$  von Null verschieden und also

$$\beta_3 = 1$$

sein, woraus ferner

$$\gamma_1 = \beta_2$$

folgt. Hiermit sind die  $[X_i, X_k]$  bestimmt

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_2, X_1] = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2,$$

$$[X_2, X_3] = \beta_1 X_1 + \gamma_1 X_2 + X_3.$$

Um diese Formeln noch einfacher zu machen, setzen wir

$$X^{(0)} = X_1, X_1^{(1)} = X_2, X_1^{(2)} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$$

und finden so

$$[X_1^{(1)} X_1^{(2)}] = X_1^{(1)}$$

$$[X_1^{(1)} X_1^{(1)}] = [\lambda_3 \gamma_1 - \lambda_2] X_1^{(1)} + \lambda_3 \gamma_2 X_1^{(1)}$$

$$[X_1^{(2)} X_1^{(2)}] = (-2\lambda_1 + \lambda_3 \beta_1) X_1^{(1)} + (\lambda_3 \gamma_1 - \lambda_2) X_1^{(1)} + X_1^{(1)}.$$

Wählen wir insbesondere

$$\lambda_3 \gamma_1 = \lambda_2, \lambda_3 \beta_1 = 2\lambda_1, \lambda_3 \gamma_2 = -2$$

so erhalten wir den folgenden Satz:

**Satz 30.** *Unter den infinitesimalen Transformationen einer dreigliedrigen Gruppe kann man immer drei von einander unabhängige*

$$\delta x = X_1 \delta t_1, \delta x = X_2 \delta t_2, \delta x = X_3 \delta t_3$$

wählen, welche

$$[X_1 X_2] = X_1, [X_2 X_3] = X_2, [X_3 X_1] = -2 X_3$$

geben.

Um nun alle zweigliedrigen Untergruppen zu finden, suchen wir in allgemeiner Weise zwei der dreigliedrigen Gruppe zugehörigen infinitesimalen Transformationen

$$\delta x = \sum_1 m_i X_i \text{ und } \delta x = \sum_1 n_i X_i,$$

die in der Beziehung

$$[\sum_1 m_i X_i, \sum_1 n_k X_k] = \sum_1 m_i X_i$$

stehen. Zur Bestimmung der Coefficienten  $m$  und  $n$  findet man durch Entwicklung

$$(18) \quad \begin{aligned} m_1 n_2 - m_2 n_1 &= m_1 \\ 2(m_1 n_3 - m_3 n_1) &= m_2 \\ m_2 n_3 - m_3 n_2 &= m_3, \end{aligned}$$

und durch Elimination der  $n$

$$4 m_1 m_3 - m_2^2 = 0,$$

woraus, indem man mit  $\rho$  eine arbiträre Constante bezeichnet,

$$m_1 = 1, m_2 = 2\rho, m_3 = \rho^2;$$

die  $n$ , die wir nicht berechnen brauchen, sind bestimmt durch (18).

Folglich besitzt die ausgezeichnete infinitesimale Transformation unserer zweigliedrigen Untergruppe die Form

$$\delta x = (X_1 + 2\rho X_2 + \rho^2 X_3) \delta t$$

und also (Satz 17) bestimmt die Gleichung

$$\int^{x'} \frac{dx}{X_1 + 2\rho X_2 + \rho^2 X_3} = a_1 + a_2 \int^x \frac{dx}{X_1 + 2\rho X_2 + \rho^2 X_3},$$

die betreffende Untergruppe.

Nun aber ist wegen der Gleichung  $[X_1, X_2] = X_3$ :

$$X_3 = X_1 \int \frac{dx}{X_1}$$

und ferner zeigen die Gleichungen

$$X_2 X_3' - X_3 X_2' = X_3, \quad X_1 X_3' - X_3 X_1' = 2 X_2,$$

dass

$$X_3 = \frac{X_2^2}{X_1}$$

und durch Einsetzung

$$X_3 = \frac{1}{X_1} \left[ \int \frac{dx}{X_1} \right]^2.$$

Setzt man diese Werthe von  $X_2$  und  $X_3$  ein, findet man ohne Schwierigkeit, dass

$$\int \frac{dx}{X_1 + 2\rho X_2 + \rho^2 X_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{1 + \rho} \int \frac{dx}{X_1} + \text{Const.}$$

ist. Und die gesuchte zweigliedrige Gruppe nimmt, wenn man der Kürze wegen

$$y = \int^x \frac{dx}{X_1}, \quad y' = \int^{x'} \frac{dx}{X_1}$$

setzt, die Gestalt

$$y' = \frac{1 - a_2 + \rho a_1 + (\rho + \rho^2 a_1) y}{\rho a_2 - \rho^2 a_1 - \rho^2 a_1 y}.$$

Giebt man hier  $\rho$  successiv alle mögliche Werthe, so erhält man alle in der dreigliedrigen Gruppe enthaltenen zweigliedrigen Untergruppen. Durch passenden Wahl von  $\rho a_1$  und  $a_2$  kann daher die letzte Gleichung eine jede Transformation der dreigliedrigen Gruppe darstellen. Und wenn man  $\rho a_1$  und  $a_2$  als gleichberechtigte Parameter auffasst, so ist unsere Gleichung



chung die Definitions-Gleichung der dreigliedrigen Gruppe. Dies giebt

*Theorem 4. Durch Einführung zweckmässiger Variabeln kann jede dreigliedrige Gruppe auf die Form*

$$x' = \frac{a_1 + a_2 x}{a_3 + x}$$

*gebracht werden.*

### § 8.

#### Erledigung des gestellten Problems.

Indem man wie bei der dreigliedrigen Gruppe verfährt, beweist man,

1) dass jede viergliedrige Gruppe  $x' = f(x, a_1, a_2, a_3)$  vier unabhängige infinitesimale Transformationen

$$\delta x = X_1 \delta t_1 \dots \delta x = X_4 \delta t_4 \quad (20).$$

enthält,

2) dass die Differentialquotienten von  $f$  hinsichtlich der  $a$  sich folgendermassen ausdrücken

$$\frac{df}{da_1} = A_1 X_1 f + B_1 X_2 f + C_1 X_3 f + D_1 X_4 f,$$

wo die Grössen  $A B C D$  nur von den  $a$  abhängen.

Die vier in dieser Weise erhaltenen Gleichungen müssen den bekannten Integrabilitäts-Bedingungen genügen. Dies giebt sechs Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} & (A_i X_1' + \dots + D_i X_4') (A_k X_1 + \dots + D_k X_4) \\ & - (A_k X_1' + \dots + D_k X_4') (A_i X_1 + \dots + D_i X_4) \\ & + \left( \frac{dA_i}{da_k} - \frac{dA_k}{da_i} \right) X_1 + \dots + \left( \frac{dD_i}{da_k} - \frac{dD_k}{da_i} \right) X_4 = 0 \end{aligned}$$

wo  $i$  und  $k$  zwei beliebige unter den Zahlen 1, 2, 3, 4 bezeichnen.

Da nun jede viergliedrige Gruppe dreigliedrige Untergruppen enthält, können wir voraussetzen, dass die drei ersten

infinitesimalen Transformationen (20) einer solchen Untergruppe angehören, dass ferner

$$[X_1, X_2] = X_1, [X_2, X_3] = X_3, [X_1, X_3] = 2X_2.$$

Alsdann nehmen unsere 6 Bedingungs-Gleichungen die Form  $(A_1 D_k) [X_1, X_k] + (B_1 D_k) [X_2, X_k] + (C_1 D_k) [X_3, X_k] = \sum L_k X_k$  wo die  $L_k$  Funktionen der  $\alpha$  sind. Und da die Determinante  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  von Null verschieden sein muss, indem sonst eine Relation der Form

$$\sum \psi_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \frac{df}{d\alpha_k} = 0$$

bestände, so müssen unsere Gleichungen, wie man durch eine elementäre Ueberlegung einsieht, sich hinsichtlich der  $[X_1, X_k]$  auflösen lassen

$$[X_1, X_k] = \sum c_k X_k,$$

und die Coefficienten  $c_k$ , die sich zunächst als Funktionen der  $\alpha$  darbieten, müssen Constanten sein.

Wir haben also

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_1, [X_2, X_3] = X_3, [X_1, X_3] = 2X_2, \\ [X_1, X_4] &= \sum \alpha_k X_k, [X_2, X_4] = \sum \beta_k X_k, [X_3, X_4] = \sum \gamma_k X_k \end{aligned}$$

die drei ersten Gleichungen geben

$$X_2 = X_1 \int \frac{dx}{X_1}, X_3 = X_1 \left[ \int \frac{dx}{X_1} \right]^2.$$

Um die zurtickstehenden Rechnungen zu vereinfachen, setzen wir

$$y = \int \frac{dx}{X_1}, Y = \frac{X_4}{X_1}$$

und suchen  $Y$  als Funktion von  $y$  vermöge der drei letzten Gleichungen, welche die Gestalt

$$\begin{aligned} Y' &= \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 Y \\ y Y' - Y &= \beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 y^2 + \beta_4 Y \\ y^2 Y' - 2y Y &= \gamma_1 + \gamma_2 y + \gamma_3 y^2 + \gamma_4 Y \end{aligned}$$

annehmen. Eliminirt man  $Y'$  zwischen den beiden ersten Gleichungen, und löst die Resultante hinsichtlich  $Y$  auf, was offenbar möglich ist, so erkennt man, dass diese Grösse eine rationale

Funktion von  $y$  ist. Daraus folgt, dass  $\alpha_4$  gleich Null sein muss. Substituiren wir diesen Werth in die erste Gleichung, und integriren sie darnach, kommt

$$Y = A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + A_4 y^3$$

wo die  $A$  Constanten sind. Substituiren wir diesen Werth in die beiden letzten Gleichungen, findet man, dass  $A_4$  gleich Null ist, und dass folglich  $X_4$  die Form besitzt

$$X_4 = X_1 (A_1 + A_2 y + A_3 y^2)$$

und dass also

$$X_4 = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3.$$

Diese Gleichung steht aber im Widerspruche mit unserer Voraussetzung, dass die infinitesimalen Transformationen (20) von einander unabhängig sind. Und da diese Voraussetzung erlaubt ist, wenn überhaupt viergliedrige Gruppen existiren, schliessen wir:

*Satz 31. Es giebt keine viergliedrige Gruppe.*

Da nun jede fünfgliedrige Gruppe eine viergliedrige Untergruppe enthalten muss, sehen wir, dass es auch keine fünfgliedrige Gruppe existiren kann u. s. w. In dieser Weise können wir also schliessen, dass es keine Transformations-Gruppe mit mehr als drei Parametern giebt. Berücksichtigen wir endlich die Ergebnisse der vorangehenden Paragraphen, können wir das folgende Theorem aussprechen, welches alle Sätze dieser Abhandlung resumirt.

*Theorem V. Eine jede Transformationsgruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist ähnlich mit einer linearen Gruppe, und enthält somit höchstens drei Parameter.*

## OM DE ISFYLDTE FJORDE OG DE GLACIALE DANNELSER I NORDGRÖNLAND

AF

AMUND HELLAND.

Det mægtige Isdække, som skjuler det indre af Grønlands Fastland, og som nærer de mægtige Bræer, der fylder Landets Fjorde, har en mangfoldig geologisk Interesse. Ei alene er Grønlands naturlige Beskaffenhed i og for sig mærkværdig, men det nuværende Grønland med sin Indlandsis, sine mægtige Bræer og sine moderne glaciale Dannelser er den Model, hvorefter den geologiske Videnskab maa opkonstruere de glaciale Tilstande i de Lande, hvor Isbræerne fra gammel Tid har efterladt sig Spor.

De i det følgende anførte Iagttagelser fra Grønlands isfyldte Fjorde er anstillede paa en Reise i Nordgrønland i Maanederne Juni, Juli og August 1875. Reisen omfatter Strækningen fra Kolonien Egedesminde ( $68^{\circ} 42' 9''$  N.B. efter Nordenskjöld) indtil Fjorden Kangerdlugssuak (omtrent  $71^{\circ} 15'$  N.B.) i Kolonien Umanaks Distrikt, hvorved følgende isfyldte Fjorde blev besøgte: af dem, der udsender Isfjelde af store Dimensioner: Jakobshavn og Torsukatak Isfjorde, samt af mindre Isfjorde: Sarkardlek og Alangordlek i Jakobshavns Distrikt samt Kangerdlugssuak. Videre besøgte den isfyldte Del i Ilartdlek ved Pakitsok, hvorfra Indlandsisen besteges. I Umanaks Distrikt besøgte en hel Del Bræer, der vel er smaa

sammenlignede med de mægtige Iæstrømme i Fjordene, men hvoraf mange, udfyldende Smaadale, kan maale sig med de største i Europa.

Det ligger i Sagens Natur, at hvor en enkelt europæisk Iagttager ledsaget af lidet civiliserede Eskimoer skal foretage Reiser i et vidtstrakt og tyndt befolket Land med en kort og kold Sommer, der maa Arbeidet lægges fortrinsvis i en enkelt Retning, hvis Iagttagelserne ikke skal blive Brudstykker, men udgjøre et samlet Hele. Af denne Grund var det fra først af Planen for Reisen at søge ind i saa mange Isfjorde som muligt og op imod Indlandsisen, medens de mange andre interessante geologiske Forhold, som Nordgrønland frembyder, blot kunde offres en mindre Tid.

Det forhaandenværende Kjendskab til de isfyldte Fjorde og Indlandsisen i Nordgrønland skyldes fornemmelig, for ikke at sige saa godt som udelukkende, Dr. Rinks Arbeide: «Om den geographiske Beskaffenhed af Handelskolonierne i Nordgrønland» samt Nordenskjölds: En Expedition till Nordgrønland. At mange af de Forhold, der nødvendigvis maa omtales, hvor Indlandsisen og Isfjordene beskrives, tidligere er iagttagne og omtalte af de nævnte Forskere, er saa almindeligt bekjendt, at det turde være overflødigt at gjøre opmærksom derpaa. Paa det Kart, der ledsager det førstnævnte Arbeide, vil man gjenfinde de fleste af de i det følgende nævnte geographiske Navne.<sup>1)</sup>

Om Nordgrønlands Orografi. En norsk Geolog, der kommer til Nordgrønland, vil finde meget, der er ham nyt og ukjendt, men maaske meget mere, der er ham gammelt og bekjendt. Den største Del af Nordgrønland bestaar af Bergarter, der tilhører Grundfjeldet: forskjellige Gneisbergarter, Graniter,

<sup>1)</sup> Hvad Ortografien i de grønlandiske Navne angaar, da har jeg saavidt muligt søgt at erhverve mig Kundskab om Navnenes Betydning, og da anvendt den Ortografi, som benyttes i Kleinschmidts „Den grønlandiske Ordbog.“ Med Bogstavet k betegnes en Lyd, der adskiller sig fra k væsentligt derved, at den er en Strubelyd, der dannes dybere i Munden, og lyder efter en lang eller betonet Vokal næsten som rk.

Glimmerskifere, Hornblendeskifere o. s. v. overhovedet af Bergarter, der er vel kjendte fra Norges og Sveriges azoiske Formation. Diskøen og Nûgssuaks Halvø dannes derimod af yngre Bergarter, nederst bestaaende af Sandsten, Sand og Skifere med Kullag og fossile Planter med et derover liggende mægtigt Dække af Basalt. Som bekjendt har Prof. Nordenskjöld medbragt rige Samlinger af disse fossile Planter, der tilhører Kridttiden og den miocæne Tid, og det er af Oswald Heer paavist,<sup>1)</sup> at disse Planterester vidner om, at det nuværende af Isbræer bedækkede Nordgrønland har havt et Klima, som det nu findes paa Grændsen af den varme Zone, omtrent som paa de kanariske Øer og i det nordlige Egypten, og at den aarlige Middeltemperatur ikke tør sættes under 21 til 22° C.

Paa Uperniviks Ø og flere Steder langs Sydsiden af Umaksfjorden kan man se, hvorledes Nutidens mægtige Bræer holder paa at skjære sig Dale tvert ned igjennem disse fossilførende Lag, slæbende med sig til sin Endemoræne eller til Havet store Masser af de Planteforsteningerne indeholdende Stene, saa at Ismasserne holder paa at ødelægge endog de halvt udslettede Aftryk af den tropiske Plantevæxt, som de har fortrængt.

Vi finder Grønland ligesom Norges Vestkyst gjennemsat af mange og store Fjorde, hvilke skjærer dybt ind i Landet, medmindre Is fylder dem paa lange Strækninger ud imod Munden. Foran Fjordene ligger ud imod Havet en Skjærgaard af større og mindre Øer, der danner et fuldstændigt Sidestykke til Skjærgaarden i Norge. Overhovedet ligner den Del af Grønland, der ligger nærmest mod Havet eller Grønlands Yderland, paa en paa faldende Maade de yderste Skjær og Øer af Vestkysten af Norge, saavel hvad Bergarterne som hvad Øernes Form angaar. Høiderne omkring Fjordene er meget forskellige i Nordgrønland, dels er det Aaser paa nogle hundrede

<sup>1)</sup> Die Kreide-Flora der arctischen Zone. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Band 12 No. 6.

Fod til op imod 1000 Fod, dels stiger Fjeldene op fra Havet til Høider paa 4000 Fod, ja naar tildels op til 6000 Fod og lidt derover. Overhovedet senderfalder den Del af Grønland, hvorm her er Tale, i geologisk og orografisk Henseende, naturlig i 3 Dele: nemlig Fastlandet omkring Diskobugten, Diskøens med Nûgssuakhalvøens Taffelland og Umanaks høie Land med dets Alper.

Fastlandet omkring Diskobugten er et Gneisland, der ikke er synderligt høit, naar i den søndre Del sjelden op til 1000 Fod, i den nordre Del dog op til 2000 Fod paa Arveprindsens Eiland. Øerne udenfor i Egedesmindes Distrikt er smaa, tilrundede Klippeøer af liden Høide. Fastlandet gjennemsættes af to store isfyldte Fjorde, nemlig Jakobshavns i den midtre Del og Torsukataks i den nordlige Del. I en paafaldende Modsetning til Konfigurationen af Fastlandet omkring Diskobugten staar Formen af Diskøen, der som omtalt dannes af Basalt med en underliggende Formation fra Kridttiden. Den forskellige geologiske Bygning af Landet har her frembragt to i orografisk Henseende forskellige Landskaber. Diskøen og Nûgssuaks Halvø er ikke saaledes udstykkede i Smaasøer og mindre Halvøer som det mere kuperede Gneisland inde i Diskobugten, men denne Del af Nordgrønland danner Taffelland af Basalt, der ved Vaigatet er delt i to Dele med en i det hele symmetrisk geologisk Bygning paa begge Sider af Vaigatet. Ingen mægtig Bræ fra Indlandsisen gjennemsætter denne Del af Nordgrønland, der kun paa en liden Strækning støder op til det isdækkede Indre, men en Mangfoldighed af Isbræer søger ned i Dale fra det høie snedækkede Land paa Disko og Nûgssuaks Halvø. Høider paa 3 til 4000 Fod findes i denne Del af Nordgrønland. De største Høider i den Del af Nordgrønland, der bestaar af Basalt, ligger sandsynligvis paa den nordøstre Side af Nûgssuaks Halvø, hvor Kilertinguak naar en Høide af 1857 Meter<sup>1)</sup> (5919 Fod). Den nordenfor Nûgssuaks Halvø

<sup>1)</sup> Efter trigonometrisk Maaling fra en paa Umanakøen opmaalt Grundlinie.

liggende Ubekjendt Eiland bestaar af basaltiske Bergarter ligesom Halvøen, og bør derfor henføres til denne.

Umanaks høie Land dannes af en Række Halvøer mellem isfyldte Fjorde med foranliggende høie Øer; de Dele af samme, der er bereiste, bestaar af Gneisbergarter og azoiske Skifere. Fjeldene hæver sig har overalt til større Høider, selv paa mindre Øer. Den lille Umanaks Ø, der ligger midt i Fjorden og kun har en Længde af 1 Mil, hæver sig saaledes fra Havet til en Høide af 1163 Meter (3707 Fod), og den øverste Del af Øen er ubestigelig. Øerne og Halvøerne mellem Fjordene i denne Del af Grønland har bratte, ofte ubestigelige Sider, og paa enkelte Steder danner Fjeldene udmærkede Alpeformer, blandt hvilke enkelte Tinder hæver sig op til 2000 Meter. Især udmærker Strækningen omkring Mundingerne af Fjordene Kangerdlugssuak og Kangerdluarssuk sig ved sine dristige Former, store Høider og talrige Isbræer. Følgende trigonometriske Maalinger anstilledes af disse Tinder ved Hjælp af Theodolith:

Tre Tinder af Grønlænderne benævnte Agpatsiait (Fuglefjeldet, hvor Alkerne opholde sig) beliggende paa Halvøen mellem Kangerdluarssuk og Ignertifjorden. Her fandtes Høiderne

1964 Meter = 6260 Fod.

2032 Meter = 6477 Fod.

1930 Meter = 6151 Fod.

Videre fire Tinder af Grønlænderne benævnte Kioke, beliggende paa Halvøen mellem Kangerdluarssuk og Sundet mellem Uperniviksø og Fastlandet, fandtes at have følgende Høider:

1738 Meter = 5540 Fod.

1847 Meter = 5887 Fod.

1753 Meter = 5587 Fod.

1878 Meter = 5986 Fod.

Et inde i Fjorden Kangerdluarssuk liggende Fjeld fandtes at



have en Høide af 1958 Meter (6241 Fod). Et andet benævnt Kingasima synes at hæve sig til noget større Høider end de her maalte; dets Afstand fra Grundlinien var for stor til, at Maalingen kunde blive nøiagtig.

Dette er de største Høider, der er kjendt paa hele Grønlands Vestkyst; maaske vil der kunne paavises Fjelde, der naar op til noget større Høider, liggende i Nærheden af disse her nævnte; thi de her maalte sees umiddelbart fra Havet, og det er ikke usandsynligt, at der oppe paa Fjeldmarken kan findes høiere Toppe.

Denne Del af Nordgrønland er rigt udstyret med isfyldte Fjorde og Isbræer. Paa en Strækning af omtrent 1 Breddegrad er kjendt hele 8 isfyldte Fjorde, hvoraf de to, den sydligste og den nordligste, udsende Isfjelde af et Par hundrede Fods Høide.

Om Grønlands Indlandsis. Følger man i andre Fjordlande, som til Exempel i Norge, en Fjord indover til dens Bund, saa vil man se, at Fjorden fortsætter i en Dal, og følges da denne Dal videre, saa vil det sees, at Dalen, efterhaanden som Bunden stiger, taber sig i Høifjeldet. For søger man derimod i Grønland at følge en Fjord indover mod Landet, saa vil man tidligere eller sildigere standses derved, at en Isbræ møder tvært over Fjorden fra Bred til Bred, kommende ned gennem Fjorddalen og udfyldende Fjorden og endende i en lodret Kant, foran hvilken Isfjelde hyppigt høiner sig. Disse Isbræer kan man støde paa i forskjellig Afstand fra Fjordmundingen i de forskjellige Fjorde, ja undertiden møder man dem ikke i selve Fjorden, men først oppe i Fjorddalen; men ingen større Fjord eller Dal, gaaende til det indre af Landet, er kjendt i Grønland, uden at den ender i en mere eller mindre mægtig og imposant Isbræ. Gaar man frem i Høiden over denne Isbræ langs Fjord- eller Dalsiden, saa vil man tidligere eller sildigere faa se, at den mægtige Isbræ, der fylder Fjorddalen og Fjorden, kommer fra en vid Ismark, og bestiger man saa et Fjeld ved Randen af denne Ismark, saa vil man forgjæves speide efter

Grændserne for samme, idet Isen sees at strække sig over det Indre af Landet, saa langt Øiet naar. Dette vidtløftige Isfelt, der saavidt Kundskaben fortiden naar, dækker hele det Indre af Grønland med et Areal, der vel er større end Norges og Sveriges tilsammen, benævnes Grønlands Indlandsis, af Eskimoerne *Sermerssuak* (den store Is).

De fem Steder, hvor jeg har havt Anledning til at se udover denne Isærken, har den overalt havt samme Udseende. Den er i det Hele som et Hav at se udover. Men den synes at høine sig langsomt indover og tegner sig med bølgende Linier i Horisonten. Mærkværdigt nok ligger denne bølgende Ismark lavere end de foran samme liggende Fjelde, saa at man, naar man staar oppe paa disse, ikke ser op til, men ned paa Ismarken. Særlig paafaldende er dette inderst i Fjorden *Kangerdlugssuak*, hvor Fjeldene foran Ismarken efter Øiesyn er flere tusinde Fod høiere end Indlandsisen nedenunder dem.

Ingen af de Steder, hvor jeg har havt Anledning til at se udover Indlandsisen, rager der Fjeldtoppe op af samme i stor Afstand fra Isens Grændse mod det isfrie Land. Dog hender det hyppigt, at der nær Grændsen stikker frem øformige Partier af Land, hvilke da ikke bør opfattes som isolerede Fjelde, der stikker frem af Ismarken, men meget mere som Dele af det snefrie Land, der er omcirklet af Indlandsisen eller de fra Indlandsisen nedgaaende Bræer. Eskimoerne benævner deslige Øer i Ishavet «*Nunataker*», og disse bærer samme Karakter, som det Indlandsisen begrænsende Land. I *Kangerdlugssuak*, hvor Fjeldene er høie og Fjordsiderne steile, ligger to *Nunataker*, der hæver sig til Høider som det omliggende Land med steile, næsten lodrette Sider som Fjordsiderne. Længs Indlandsisen ved *Diskobugten*, hvor Landet har mildere Former, er ogsaa *Nunatakerne* lavere og smaaakkede.

Beskaffenheden af Isen paa Indlandet i Grønland har jeg lært nærmere at kjende i *Hartdek* ved *Pakitsok*, hvor jeg besteg Indlandsisen den 17de Juli. Landet her hæver sig et Par

hundrede Fod op over Indlandsisen, og fra denne søger da en Isbræ ned indtil en Snæs Fods Høide over Havet, sandsynligvis gennem en dalformig Fordybning i Fjeldet. Paa Indlandsisen kan man komme op uden synderlig Vanskelighed ved at bestige det Fjeld, der ligger paa Bræens venstre Side, og da Toppen af dette ligger høiere end Indlandsisen, saa kan man heller sige, at man stiger ned paa end op paa samme.

Overfladen af Isen dannede her bølgeformede Smaaknause, svagt stigende indtil et Par Mands Høide, saa at der paa Overfladen var let fremkommeligt for en Fodvandrer. Af Sprækker var der faa, og disse var ikke brede, saa at man med Lethed kunde komme over dem. Dog fandtes der flere Elve, der gennemstrømmede Overfladen i mange Retninger; disse Elve førte rent, ikke leret Vand; de havde dannet sig kanalformige Leier, og Isen i Bunden af disse tegnede sig med blaa Farve. Enkelte af Elvene var saa store, at de kun med Vanskelighed kunde passeres. Sandsynligvis er det dog kun paa varme Sommerdage, at de optræder saa store. Hin Dag, den 17de Juli Kl. 4 om Eftermiddagen, havde Luften en Temperatur af hele  $7^{\circ}$  C. i Skyggen, i en Afstand af  $1\frac{1}{2}$  Meter fra Isens Overflade. Synker Temperaturen under Frysepunktet, saa forsvinder rimeligvis alle disse overfladiske Elve. Dette er i Overensstemmelse med, hvad en i Grønland bosat Mand ved Navn Jens Lange, der har været oppe paa Indlandsisen, har berettet mig. Elvene forsvandt pludseligt, naar det blev koldt.

Selve Isen er i Overfladen kornet; dog synes den kornede Struktur ikke at naa ned til noget Dyb, thi slaar man løs Stykker af Isen, saa støder man snart paa en drøi og tæt Is med Luftblærer i. Denne almindelige Is gennemses ofte af Gange af blaa Is. Nær Randen af Indlandsisen staar der op kegleformede Partier af Sand og Smaasten, dog saaledes, at Sanden og Smaastenen kun optræder i Overfladen; thi skaffer man denne bort, saa sees de indre Dele af disse Gruskegler at bestaa af Is. Meget hyppigt optraadte regelmæssige, cylinder-

formede Huller i Isen, af forskjellig Bredde og indtil  $\frac{1}{2}$  Meter dybe. De var fyldte med rent Vand, og i Bunden af dem laa en leragtig Masse. Paa Indlandsisen ligger ikke løse Stene og Sand; kun langs Kanterne nær mod Land finder man erratiske Blokke og snavset Is. Langs Randen løb en liden Moræne, der neppe naaede en Mands Høide, medens Sidemorænen af den nedenfor liggende Isbræ naaede en Høide af 16 Meter. Sammenligner man de her anførte Iagttagelser om Beskaffenheden af Indlandsisen ved Ilartdlek med den Beskrivelse, som Nordenskjöld giver af Indlandsisen ovenfor Aulatsivik-(Auleitsivik)Fjorden, saa vil det fremgaa af denne Sammenligning, at Overfladen begge Steder har samme Natur: Smaa Moræner; Stene med snavset Is langs Kanterne; Elve, der strømmer over blaalig Is; de cylinderformede Huller findes paa Indlandsisen ved Aulatsivik som ved Ilartdlek, og rimeligvis vilde den samme Beskaffenhed af Indlandsisens Overflade gjenfindes paa hele Strækningen mellem de to nævnte Steder, kun afbrudt ved takket og sprukken Is, der hvor de store Isbræer søger ned i Fjordene; thi Overfladen af de store Isbræer er, som senere skal omtales, ganske anderledes sønderskaaret og ufremkommelig end Indlandsisen. De Sprækker og gabende Kløfter, som fremkommer ved Bevægelsen af Ismasserne i Bræerne, synes dog ikke ved de forholdsviis smaa Bræer at strække sig langt op igjennem Indlandsisen, hvis det er tilladt at dømme fra Bræen ved Ilartdlek. Thi kun nogle faa tusinde Meter overfor Enden af den kløftede Bræ var der fremkommeligt paa Indlandsisen, saaledes at jeg uden Vanskelighed kunde gaa tvertover til den Fjeldvæg, der paa høire Side begrænsede Bræen. Hvorlangt Sprækkerne i de store isfyldte Fjorde strækker sig op igjennem Indlandsisen, derom har jeg ingen Iagttagelser.

Hvor mægtig den Ismasse er, der bedækker det Indre af Grønland, er saare vanskeligt, ja neppe muligt at bestemme med Sikkerhed; thi man kjender kun Isens øvre Grændse, og hvor høit det under Isen optrædende Land ligger, kan ikke vides.

Ved Nartdlek ligger Indlandsisens Overflade ret op for Bræen i en Afstand af nogle tusinde Meter fra Havet i en Høide af 251 Meter. Hvor meget den underliggende Dalbund akraaner op under Bræen, kan ikke bestemmes, da denne er dækket af Is; lavere end halvhundrede Meter turde dog neppe Landet ligge her, hvis der ikke ligger en Inds under Bræen, og Mægtigheden af Indlandsisen ud imod Randen er derfor neppe over 200 Meter, og naar ikke op til 250 Meter; men den kan være mindre end 200 Meter. Men da Indlandsisen her stiger indover, saa er det muligt, at Isen tiltager i Mægtighed indover, hvis ikke Landet under samme høiner sig lige saa hurtigt eller hurtigere.

Som bekjendt er det Indre af Grønland saare lidet bereist, og der foreligger altsaa ikke Iagttagelser over Grændserne for denne umaadelige Ismark. Bedst kjendte er Grændserne mod Vest, der ligger nærmest det beboede Yderland, og deri er da alle enige, baade vore Forfædre, der kom did, og Eskimoerne som de nyeste Reisende, at Indlandsisen træffer man paa, naar man søger ind i Landet, saa at det vel tør ansees for givet, at Indlandsisens Grændse mod Vest strækker sig kontinuerligt fra de nordligste Kolonier helt ned til Julianehaabs Distrikt. At man ved at følge Fjordene paa den lidet bekjendte Østkyst ind imod Landet, vil støde paa Indlandsisen, fremgaar vel deraf, at Isbjerger dannes i stort Antal ogsaa paa denne Kyst. Graah beretter nemlig i sin Reise<sup>1)</sup>, at «utallige Isfjelde findes til alle Tider under Kysten». «Ofte finder man dem sammen i Hundreder, ja i Tusindevis under Landet». Den af den anden tyske Polarexpedition opdagede Kaiser Franz-Josefs-Fjord under 73 Grader er en Isfjord, der udskyder Fjelde af over 200 Fods Høide. Til Dannelsen af store Isfjelde fordres der mægtige Bræer, der næres af en betydelig Ismark i Høiderne, og de anførte Iagttagelser fra Østkysten turde saaledes alene være

<sup>1)</sup> Undersøgelser-Reise til Østkysten af Grønland. Side 117.

tilstrækkelige til at vise Existencen af en Indlandsis paa Østkysten. Det ligger da nær at antage, at den Indlandsis, hvorfra Bræerne paa Vestsiden kommer, er den samme som den, hvorfra Isfjeldene paa Østkysten dannes, med andre Ord, at der fra Vest til Øst ligesom fra Nord til Syd strækker sig en kontinuerlig Ismark over det Indre af Grønland. Dette lader sig naturligvis ikke paastaa med Sikkerhed, da ingen har reist over Landet og seet, at det er saa; men Antagelsen af et kontinuerligt Isdække staar i Harmoni med de rigtignok faa Iagttagelser, og om man forsøger at henlægge et isfrit Land i Grønlands Indre, saa bliver de orografiske og fysisk-geografiske Forhold i dette isfri Land af en yderst eiendommelig Natur, saaledes som Dr. Rink har paavist<sup>2)</sup>. Men selve de isfyldte Fjorde med Bræernes store Mægtighed i dem synes i Forbindelse med den ringe Regnmængde i Nordgrønland at maatte vise en kolossal Udstrækning af Indlandsisen. Regnmængden i Nordgrønland, hvor de virksomste Isfjorde findes, er ikke betydelig. Efter Iagttagelser anstillede i de sidste Aar ved Kolonien Jakobshavn udgjorde Regnmængden her fra Juli 1873 til Juli 1874 219.7 Millimeter, fra Juli 1874 til Juli 1875 183.7 Millimeter. Umanaks Distrikt, hvor den ene mægtige Isfjord optræder ved Siden af den anden, med kun et Par Miles Mellemrum, synes ikke at have en større Sne- og Regnmængde end Jakobshavns Distrikt, og den største Del af Sne- og Regnmængden føres utvivlsomt bort gennem Elve under Isen. Naar desuagtet saa enorme Bræer, man kan vel sige, de største der kjendes, eksisterer i stort Antal, da synes dette alene at kunne forklares ved et Opland eller, om man vil, et Nedbørsdistrikt af stor Udstrækning for hver Isfjord, og da nu dybe Fjorde saavel paa Vestkysten som paa Østkysten skal fyldes med Ismasser, saa synes alene

<sup>2)</sup> Om Grønlands Indre. Fra Videnskabens Verden. 2den Række No. 9.

dette Forhold at maatte lægge Beslag paa en saa stor Del af det indre Land, at det Areal, som et formodet indre isfrit Land skulde indtage, maatte blive af forholdsvis liden Udstrækning.

Hvorledes det end maatte forholde sig med Grønlands ikke undersøgte Indre, saa er det os i denne Forbindelse, hvor der nærmest er Tale om Indlandsisens og dens Bræers geologiske Betydning, ikke om de geografiske Forhold, nogenlunde tilstrækkeligt, hvad der allerede vides, at en Ismark dækker uoverskuelige Strækninger af Grønlands Indre.

Hvad der gjælder om Landets inderste Dele, at ingen kjender det, da ingen har seet det, gjælder i lige saa høi Grad om Konfigurationen af Landet under det mægtige Isdække, da ingen har seet Landet frit for Is. Imidlertid er det dog vel gjort ad Analogiens Vei at komme til et meget sandsynligt Resultat, ja endog i det store at danne sig et nogenlunde fuldstændigt Begreb om Landets Konfiguration under Isen.

Selv hos de allernyeste Polarreisende, der har gjæstet Grønlands Kyster, finder man den Tanke fremsat, at hele Landet danner et Aggregat af Øer, med andre Ord at den Skjærgaard, som træffes ved Kysterne, danner et Billede i det smaa af Landet, dog saaledes at alle disse Øer med de mellem dem liggende Sunde er tilhyllede af Is, saaledes at det Hele gør Indtrykket af et Fastland. Denne Tanke vil ikke kunne tiltrædes af dem, der er fortrolige med Fjordlande, og som med nogen Opmærksomhed har fulgt en Fjord og dens Forgreninger; thi Tanken staar i den bestemteste Strid med den Maade, hvorpaa Fjorde overalt i Verden optræder. Grønland er et ligesaa udpræget Fjordland som Vestkysten af Norge og som Vestkysten af Nordamerika. Skal man kunne danne sig en Forestilling om Konfigurationen af den Del af Grønland, der er dækket af Is, da gives hertil ingen anden Vei end den at studere Fjorddannelserne i de Lande, der ikke er dækkede af Is. Det vil da være iøinefaldende, at store, dybe og udprægede

Fjorde ikke sætter tvert igjennem Landet som Sund, men at de tvertimod forgrener sig ind imod Landet, ophører som Fjorde og fortsætter som Fjorddale, indtil de taber sig i det Indre af Landet. Hvis man har erkjendt, at det man kalder Fjorde er en eiendommelig geologisk Dannelse af samme Art i Norge som i Grønland, da maa deres Optræden i begge Lande være i det store den samme; men det hører med til Fjordenes Eiendommelighed, at de ind mod Landet forgrener sig i Dale og saa taber sig. Det synes saaledes den rimeligste Antagelse, at Fjordene i Grønland, om man tænker sig dem rensede for Is, vilde vise sig at optræde ligesom Fjorde andre Steder paa Jorden, gaa kortere eller længere Strækninger ind i Landet, derpaa gaa over til Dale og saa tabe sig, saaledes altsaa, at Grønland ikke kommer til at danne en Samling af Øer, men bliver et Land, ligesom Norge, hvor talrige Fjorde, den ene ved Siden af den anden, kommer ud mod Havet fra det Indre, uden dog at dele Landet i Øer.

Grønland med sit umaadelige Isdække og sine mægtige Bræer er et storartet Phænomen, hvis Lige Europa ikke har at opvise; dog maa det ikke betragtes som noget ganske enestaaende; det er kun Phænomenets Storartethed, der er enestaaende. De samme Forhold, men i en meget mindre Skala, gjenfindes paa en vis Maade i Justedalsbræen i Norge. Indlandsisen repræsenteres her ved selve Justedalens tildækkede Plateau med den Forskjel, at hin er flere tusinde Kvadratmile, denne kun 15 til 16 Kvadratmile. De mange Bræer i Fjordene i Grønland repræsenteres da ved de Bræer, omkring et Snes i Antal, der gaar ned i Dalene fra Justedalsbræen og delvis opfylder disse.

Om Bræerne i de isfyldte Fjorde. Isfjordene i Grønland danner de nødvendige Afløb for de Ismasser, som fremkommer af den paa Grønlands Indland faldne Sne. Isbræerne i Fjordene staar i samme Forhold til Indlandsisen, som Elvene til de Indsøer, de strømmer ud ifra. Hindres Elvene ved



Dæmninger fra at strømme ud af Indsøerne, saa voxer disse, indtil Vandstanden bliver saa høi, at en ny Elv kan bryde frem fra det lavest liggende Sted langs Indsøens Side. Tænker man sig paa lignende Vis de Fjorde, hvorigjennem Isbræerne fra Indlandsisen søger ud imod Havet, tilstoppede, saa vilde Indlandsisen voxe i Mægtighed, idet nemlig den aarlig faldne Snemængde ikke optøes af Sommervarmen, og denne Tilvæxt i Mægtighed vilde finde Sted, indtil Indlandsisen kunde faa tilstrækkeligt Afløb andre Steder mellem de foranliggende Fjelde.

Det falder bekvemt med Dr. Rink at inndeile Isfjordene i Nordgrønland i saadanne, som producerer store Isfjelde, og saadanne, der kun producerer Kalvis og smaa Isfjelde. Disse store og smaa Isfjorde er dog af samme Art, idet Bræernes Udseende og deres Overgang i Indlandsisen er den samme. Men de Isfjorde, der opfylder Havet med mange og store Isfjelde, er ved denne sin Virksomhed noget saa iøinefaldende, at de strax udmærker sig fremfor de øvrige. Nordgrønlands Isfjorde frembyder ved sin Beliggenhed i Nærheden af europæiske Kolonier og ved Landets tørre Klima Fordele for Iagttageren fremfor noget andet arktisk Land. Det tør derfor neppe slaa feil, at den stigende Interesse for de arktiske Lande og deres videnskabelige Undersøgelse atter og atter vil føre europæiske Reisende ud til disse Naturens mærkelige Værksteder, der saa forholdsvis let lader sig besøge, af hvilken Grund de Veie, ad hvilke man kan komme ind til den faste Isbræ, har sin Interesse.

Af de 5 Isfjorde, der i Nordgrønland frembringer store Isfjelde, falder de 4 indenfor den Del af Landet, hvorom her er Tale; to af disse, Jakobshavns Isfjord og Torsukatak, gennemskjærer Fastlandet ved Diskobugten, de to andre, den større Karajak og Umiamako (den store Kangerdlugssuak), ligger i Umanaks Distrikt. Den sidste af de nævnte Isfjorde benævnes paa Dr. Rinks Kart «den store

**Kangerdlugssuak**; jeg kalder den her **Umiamak** af følgende Grund: først fordi Grønlønderne paastaa, at de i Regelen benævner den saa; dernæst fordi Navnet **Kangerdlugssuak** bruges om den strax søndenfor den store Isfjord liggende Fjord. **Kangerdlugssuak** betyder den store Fjord eller Storfjorden; den store **Kangerdlugssuak** bliver altsaa den store Storfjord, af hvilken Grund ogsaa et andet Navn er at foretrække. I det følgende vil derfor Navnet **Umiamak**<sup>1)</sup> blive anvendt paa denne Isfjord, **Kangerdlugssuak** paa den søndenfor samme liggende Fjord.

Af mindre Isfjorde findes i Diskobugten to, nemlig **Sarkardlek** og **Alangordlek**, hvilke begge udmunder i to Arme af **Tasiussak**, der er en Sidefjord til Jakobshavns Isfjord. **Alangordlek**, (hvilket betyder den, som ligger yderst paa Skyggesiden) er den nordligste, **Sarkardlek** (den, som ligger yderst paa Solsiden) er den sydligste.

I **Umanaks** Distrikt ligger mellem den store **Karajaks** Isfjord, der er sydligst, og **Umiamak** Isfjord, følgende mindre Isfjorde fra Syd mod Nord: **Lille Karajak**, **Sermilik** (Fjorden med Bræen i), **Itivdliarssuk**, (det store Sted, hvor der er Overgang) **Ingnerit** (Trolde mænd), videre **Kangerdluarsuk**, (den smalere Fjord) og **Kangerdlugssuak** (den store Fjord).

---

<sup>1)</sup> Navnet betyder „der er Umiakerne eller Konebaadene“. Om Aarsagen til at Fjorden bærer dette Navn, fortalte en Eskimo følgende: I den Tid, da Eskimoerne og Hollønderne laa i Krig, (hvilket vel vil sige i den Tid, da Hollønderne havde for Skik at plyndre Eskimoerne for deres Spæk og Skind) nærmede et hollandsk Skib sig Kysten. De forskrøkkede Eskimoer samlede da alle sine Eiendele og sine Kvinder og Børn i Konebaadene og reiste ind i den her omtalte isfyldte Fjord, for at Hollønderne ikke skulde kunne finde dem eller følge dem. Her blev Eskimoerne sandsynligvis knuste af Isfjelde; thi de kom aldrig ud af Fjorden igjen, og siden den Tid har Fjordens Navn været **Umiamak** — der er Konebaadene. — Med Hensyn til Navne paa de to andre Isfjorde, da benyttes **Torsukátak** som Navn paa smale Løb med høit Land paa begge Sider, **Karajak** som Navn paa en af Fjelde omsluttet Bugt.

Jakobshavn Fjord er fyldt af den store Bræ, der danner de mange Isfjelde, som søger ud gennem Diskobugten. Den er den sydligste af de Isfjorde, der udsender Isbjerge af største Dimensioner, og dens Beliggenhed er efter Rink 69° 10' NB. Indigjennem Isfjorden til Bræen er det om Sommeren aldeles umuligt at reise med nogen Art af Fartøier, da Isfjelde og Brudstykker af saadanne aldeles opfylder Fjorden i den Grad, at Vand neppe er at opdage, naar man staar i Høiderne og ser ud over Isfjeldene. Ad Omveie lader det sig dog gjøre at komme lige hen til den faste Isbræ og udpaa samme. Den letteste Vei, der fører til Isbræen, og som tidligere er beskrevet af Rink og Nordenskjöld, er over Sidefjorden Tasiussak. Til denne sidste kommer man om Sommeren fra Klaushavn af ved  $\frac{1}{4}$  Mil søndenfor dette Sted at gaa overland. Imidlertid maa man bære en Konebaad med sig over til Sidefjorden, da denne skal passeres. Paa Veien ligger der en Indsø, over hvilken man kan ro, naar Vandet er aabent.<sup>1)</sup> Paa Tasiussak kan man ad to Veie søge hen imod Isfjorden; enten kan man ro hen til det Sted, hvor Tasiussak udmunder i Isfjorden, eller ogsaa kan man reise over til en dalformig Forsækning paa Tasiussaks Nordostside, igjennem hvilken der er godt fremkommeligt, omtrent 1 Times Vandring over til Bugten Tivsarigssok (det Sted, hvor det lugter godt af Blomster). Paa det første Sted ved Tasiussaks Munding i Isfjorden kommer man ikke frem til den faste Isbræ; thi vel ligger der Is langs Kanterne lidt ovenfor Mundingen, men de midtre Partier af Fjorden er her ikke længer Bræ, men Isfjelde, og disse dannes, som senere skal omtales, lige indtil i en Afstand af en geografisk Mil ovenfor dette Sted. Ved Tivsarigssok kan man derimod komme helt til Isbræen og ud paa samme. Dette Sted

<sup>1)</sup> Den 5te Juli 1875, da denne Indsø passeredes, var den endnu belagt med Is; kun langs Kanterne var den paa enkelte Strækninger aaben, saa at Umiaken maatte isæres rundt Indsøen dels ved at roes langs Kanterne, dels ved at bæres over Isen.

danner nemlig en Bugt af Isfjorden, hvilken Bugt er belagt med Is og ganske spærret af den foranliggende Isbræ, der fylder Fjorden, dog saaledes at Havvandet trænger ind i Bugten, hvilket fremgaar deraf, at Søen i Bugten synker og stiger med Flod og Fjære, samt deraf, at der mellem Sprækkerne i Isen paa Bugten fandtes en død Saltvandsfisk, af Grønlænderne benævnet *Ekaluvak*, af de Danske Graafisk.<sup>1)</sup> Over Isen paa denne Bugt var der fremkommeligt langs den steile Fjeldside helt ud til Isbræen, og her var der videre Anledning til at gaa op paa Fjordsiden og videre lange Strækninger langs denne. Fra Høiderne kan man se ud over Isbræen i Fjorden, saavel som til Indlandsisen og Isbjergene udenfor Bræen.

I Modsætning til Indlandsisen, hvis Overflade er jævn, og som derfor lader sig passere, er Overfladen af den kolossale Bræ, der udfylder Jakobshavns Isfjord, kløftet og udstykket i Ispigge og Istinder paa indtil halvhundrede Fod. Indtil et hundrede Skridt ud paa Bræen er den dog ofte passabel; men her møder gabende Sprækker af Favnes Bredde i alle Retninger, mellem hvilke gabende Kløfter Isen hæver sig i steile og ubestigelige Pigge. Over hele Bræen staar deslige Pigge frem, saa at Overfladen tegner sig som en Mangfoldighed af saadanne, naar man stiller sig i Høide med Bræens Overflade. Da disse Pigge ofte løber op i skarpe Spidser, frembyder de en bekvem Leilighed til Maaling af Hastigheden af Bræens Bevægelse, saaledes som senere skal omtales, idet de skarpe Spidser med stor Nøiagtighed lader sig indstille i Theodolitens Traadkors. Langs Jakobshavns Isfjord løber der paa de Dele af samme, som jeg har besøgt, ingen sammenhængende

<sup>1)</sup> I Bugten ved Tivsarigssok forekommer Sælhund. Da Bugten er lukket ved den mægtige Bræ, saa at Sælhunde nu neppe kan antages at kunne komme ud af samme, saa anser Dr. Rink det for rimeligt, at de har været afskaaret fra Havet i en overordentlig lang Række af Aar, og har forplantet sig her. De ernære sig her tildels af Fisk, som man finder under Isen i Bugten, thi et Exemplar af den nævnte Graafisk fandtes i Maven paa en Sælhund, som mine Folk skød her.

Sidemoræne. Paa selve Bræen ligger der nærmest Siderne erratiske Blokke og meget snavset Is, dog kun indtil faa hundrede Meters Afstand fra det faste Land. Ude paa de midtre Partier af Bræen saaes ingen erratiske Blokke. Figur I paa Plan II forestiller et idealt Snit gennem Jakobshavns Isfjord, i hvilket de vertikale Afstande er for store i Forhold til de horizontale.

Bredden af Fjorden, som dog varierer, maalttes til 4500 Meter, hvilken Bredde altsaa tillige er Isbræens. Længden af Fjorden fra det Sted, hvor Bræen gaar over i Indlandsisen, eller hvor Fjordsiderne forsvinder i Indlandsisen, indtil det Sted, hvor Isbjergene dannes, er efter en omtrentlig Maaling 21 Kilometer. Høiden af det Punkt, hvor Fjordsiden forsvinder ved Indlandsisen, er lidt over 150 Meter over Havet. Selve Bræens Heldning naar ikke fuldt op til  $\frac{1}{4}$  Grad.

Isbræen gaar jævnt over i Indlandsisen, som sees at høine sig sagte indover ovenfor Bræen. Foran Bræens Ende hæver enkelte Isfjelde sig over Høiden af Isbræen; Isfjeldene naar nemlig ikke sjelden op mod 70 Meter, og Høiden af den Kant, hvormed Isbræen ender, overstiger efter Maalingen af en Del Ispigge neppe 40 Meter. Den Linie, hvor Isbræen ophører, og hvor Isfjeldene begynder, var ved Jakobshavns Isfjord isænefaldende. Thi endskjönt Overfladen af Isbræen ved de paa den optrædende Pigge og mellemliggende Kløfter har et forvirret Udseende, saa bliver Uordenen endnu større der, hvor Isfjeldene foran samme hæver sig i alle Former og Stillinger. Men endnu sikrere lader det Sted, hvor Bræen ophører, sig bestemme derved, at der udover den faste Bræ ligger et ganske tyndt Lag af Støv, sandsynligvis ført ud over Bræen ifra Fjordsiderne ved Vindene. Siderne af de nyligt løbrudte Isfjelde foran Bræen er ikke bedækkede med dette Støv, af hvilken Grund Isen i Isfjeldene tegner sig mere blændende hvid end Isen i Bræens Overflade.

Siderne omkring Jakobshavns Isfjord er ikke synderlig

steile og høie, og der er fremkommeligt lange Strækninger langs Fjordsiden.

Bræen i Fjorden bevæger sig med særdeles stor Hastighed, saaledes som de i det følgende anførte Maalinger viser. Bestemmelsen af Isbræens Hastighed i disse store Isfjorde er forbunden med Vanskelighed, idet man umuligen kan komme frem til de midtre Dele af Bræen, hvis Hastighed man skal bestemme. Den sædvanlige Methode, hvorefter man rammer Pæle ned i Isen tvert over Bræen i en ret Linie, er af denne Grund her ikke anvendbar. Hastigheden maa bestemmes derved, at en Grundlinie opmaales langs Fjordsiden, og vedkommende Punkters Beliggenhed bestemmes ved Hjælp af denne Grundlinie og Vinkelmaalinger. Maales saa atter efter en Tids Forløb Vinklerne fra Grundlinien til samme Punkt, saa lader Længden af det af samme Punkt gjennemløbne Rum sig bestemme. Som omtalt frembyder de mange spidse Pigge paa Bræens Overflade særdeles bekvemme Punkter til at indstille i Theodoliten; paa Grund af at Bræens Hastighed er betydelig og Piggene mangfoldige i Antal, bør man nøiagtigen aftegne og mærke sig de Pigge, man maaler, saa at man kan kjende dem igjen. Ligger de Punkter, hvis Hastighed man skal bestemme, langt fra Grundlinien, og bevæger de sig langsomt, da er denne Methode uanvendelig, idet Forandringen af Vinklerne da bliver saa liden, at der til deres Bestemmelse behøves Instrumenter, der er for fine til, at man kan drage dem med sig i saa uvejsomme Egne. \*) Nedenfor vil man finde meddelt Resultaterne af Maalingerne. I den første Rubrik findes de maalte Punkter betegnede med Tallene I til VI, og da der er foretaget flere Maalinger af samme Punkt med forskellige Mellemløb i Tid, saa er første, anden og tredje Maaling af samme Punkt betegnet med a, b og c. I anden Rubrik findes Tiden, da Maalingerne foretoges, og Antallet af Timer, hvori Punktet har

\*) Maalingerne af Isbræernes Hastighed er foretagne med en Theodolit, der tillod Aflæsninger paa et Minuts Nøiagtighed.

bevæget sig. I sidste Rubrik findes den Afstand fra Fjordsiden, hvori det maalte Punkt laa; videre i fjerde Rubrik det i den angivne Tid gennemløbne Rum, endelig gennemsnitlig Hastighed pr. Time, pr. Døgn, samt midlere Hastighed pr. Døgn.

Punktes Navn.	Tid, Dag og Klokkeslet da Maalingerne foretoges.	Antal af Timer, hvori Punktet har bevæget sig.	Længden af det gennemløbne Rum i disse Timer.		Hastighed af Punktet pr. Time.		Hastighed af Punktet pr. Døgn.		Midlere Hastighed af Punktet pr. Døgn.		Afstand af Punktet fra Fjordsiden.	
			Timer.	Meter.	Meter.	Meter.	Meter.	Meter.	Meter.	Meter.		
I	a Fra 7de Juli 3 E. til 8de Juli 10½ F.	19½	11.88	0.609	14.62	400						
	b Fra 8de Juli 10½ F. til 8de Juli 6 E.	7½	4.46	0.595	14.27	14.70						
	c Fra 8de Juli 6 E. til 9de Juli 9 F.	15	9.51	0.634	15.21							
II	a Fra 7de Juli 3 E. til 8de Juli 10½ F.	19½	14.59	0.748	17.95	420						
	b Fra 8de Juli 10½ F. til 8de Juli 6 E.	7½	3.80	0.507	12.16	15.36						
	c Fra 8de Juli 6 E. til 9de Juli 9 F.	15	9.98	0.665	15.97							
III	a Fra 7de Juli 3 E. til 8de Juli 10½ F.	19½	12.13	0.622	14.93	445						
	b Fra 8de Juli 10½ F. til 8de Juli 6 E.	7½	4.97	0.662	15.90	15.18						
	c Fra 8de Juli 6 E. til 9de Juli 9 F.	15	9.20	0.613	14.72							
IV	a Fra 7de Juli 3 E. til 8de Juli 10½ F.	19½	12.52	0.642	15.41	449						
	b Fra 8de Juli 10½ F. til 8de Juli 6 E.	7½	4.63	0.617	14.81	15.24						
	c Fra 8de Juli 6 E. til 9de Juli 9 F.	15	9.81	0.654	15.70							
V	a Fra 8de Juli 12 M. til 8de Juli 7 E.	7	4.97	0.710	17.08	1049						
	b Fra 8de Juli 7 E. til 9de Juli 10 F.	15	14.04	0.936	22.46	19.77						
	a Fra 8de Juli 12 M. til 8de Juli 7 E.	7	5.63	0.804	19.30	19.54						
VI	b Fra 8de Juli 7 E. til 9de Juli 10 F.	15	12.36	0.824	19.78	1059						

Som det sees af ovenstaaende Tal, bevæger Punkter, der ligger i en Afstand af mellem 400 og 450 Meter fra Kanten af Isbræen, sig med en Hastighed af omtrent 15 Meter i Døgnet, medens Punkter, der ligger 1000 Meter ude paa Bræ, gaar med cirka 20 Meters Hastighed i Døgnet. Hastigheden af Isbræen, hvor den ligger op imod Fjordsiden, maales paa den Maade, at der lagdes spidse Stene ind i Bræen, og paa det faste Land lige ved Bræen lagdes lignende spidse Stene, saaledes at Spidserne af Stenene i Bræen stod netop ligeover for Spidserne af Stenene, der laa paa Land. Det fandtes da, at den yderste Rand af Isbræen, hvor den støder lige op til Fjordsiden, bevæger sig saare langsomt, saaledes at Hastigheden neppe udgjør mere end 0.02 Meter i 24 Timer.

Det fremgaar altsaa af Maalingerne, at Bræerne i de isfyldte Fjorde bevæger sig med en mod Midten tiltagende Hastighed, noget der som bekjendt ogsaa finder Sted med de mindre Isbræer.

Naar den nærmest Fjordsiden liggende Del af Bræen er lidet gjennemsat af Sprækker og kan befærdes, da finder dette sin Forklaring i de anførte Maalinger, idet Sprækkerne lettest dannes og bliver størst i de bevægeligste midtre Partier, hvorimod Kanterne af Bræen, hvilke gaar langsomt, beholder en jævnere Overflade.

Det sees videre af de ovenfor anførte Tal, at denne store Bræ i Fjorden bevæger sig i sine midtre Partier med en Hastighed, der hidindtil ikke vides at være iagttaget ved nogen Bræ. Denne Hastighed er saa meget mere paafaldende, som selve Bræens Overflade ikke skraaner betydeligt, idet Hældningen kun udgjør omtrent  $\frac{1}{2}$  Grad; som bekjendt er Hastigheden hos Bræer i Europa med meget større Hældningsvinkler meget mindre.

De ovenanførte Maalinger foretoges paa Dage, da Luften efter grønlandske Forhold havde en høi Temperatur, nemlig op til 10° Celsius i Skyggen, medens den almindelige Sommer-



temperatur er 4, 5 og 6°. Nogen Forskjel med Hensyn til Hurtigheden i Bevægelsen om Natten og om Dagen lader sig ikke udlede af de ovenfor omtalte Tal. Ligeledes er det ubekjendt, om Bræen bevæger sig langsommere paa kolde Dage end paa varme, samt om den bevæger sig langsommere om Vinteren end om Sommeren. At den overhovedet bevæger sig om Vinteren, fremgaar imidlertid deraf, at Isfjelde ogsaa dannes ved Vintertid, idet der under disses Dannelser slaaes store Revner i Vinterisen paa Fjorden, hvilket Grønlænderne beretter. Disse søger nemlig ved Vintertid ind til Isbræerne, hvor Vandet holdes aabent paa Grund af Bræernes Kalvning, og der saaledes er Anledning til at fange Sælhunde, naar Søen ellers er belagt med Vinteris.

Hvor langt det salte Fjordvand under Jakobshavns Isfjord strækker sig, og om Isbræen paa en længere Strækning ikke berører Bunden i Fjorden, men flyder paa Vandet, kan jeg ikke afgjøre. Til de Mængder af Is, som kan antages at passere ud gennem Jakobshavns Isfjord, til Fjordens Saltgehalt, den sandsynlige Mægtighed af Bræen samt til Elvene ved Isfjordene og deres Slammængde skal vi senere komme tilbage, hvor der bliver Tale om Isfjeldene og deres Dannelse.

Fra Tivsrigssok kan man let paa en Dag komme ind til de to isfyldte Fjorde, Alangordlek og Sarkardlek. Disse to Fjorde danner nemlig to Arme af den omtalte Sidefjord til Jakobshavns Fjord Tasiussak. Fra Tivsrigssak tager man altsaa Veien tilbage til Tasiussak og ror ind gennem denne helt til Bunden, hvor man da, hvis man følger Tasiussakens nordøstre Side, naar helt frem til Alangordlek. Denne Fjord udsender nemlig kun smaa Isfjelde indtil 10 Meter i Høide, og da de kun driver enkeltvis omkring i Fjorden, saa er denne med Lethed passabel helt frem til Bræen. Denne ender med en steil Kant, der vel naar op til 10 Meter, hvilken Kant gaar fra Fjordens ene Bred til den anden. Overfladen af denne Bræ er ujævn og fuld af Sprækker, hvilke er saa brede og

gjennemsetter Bræen i saa mange Retninger, at den ikke er til at passere; dog er Overfladen ikke i den Grad fuld af Pigge og Spidser som Jakobshavns Isfjord. Langs denne Bræ gaar der en Moræne, hvilken undertiden afdæmmer Vandet, saaledes at der langs Morænen ligger smaa Vande eller Damme, i hvilke da Slammen fra Bræelven afsætter sig ved Morænen. Paa denne Maade kommer der til at ligge lagformede Dannelser af mindre Udstrækning lige op til Morænen, hvis Materiale bestaar af Sand, Sten og Blokke om hinanden, og som undertiden naar op til en halv Snes Meter. I denne Moræne saaes et Sted et regelmæssigt tragtformigt Hul, dog ikke af mere end 1 Meters Diameter, hvilket jeg omtaler her af den Grund, at dette Hul synes være af samme Art, som de Huller i de svenske Aaser, der beskrives af de svenske Geologer under Navn af «Åsgropar». Følger man Sidemorænen ovenfra nedover, saa sees det paa et Sted, at Morænen og Bræen ved dens Side gaar opover langs en liden Haug paa omtrent halvhundrede Fod, saaledes at Morænen kom til at ligge paa Toppen af den lille Haug, om Bræen smeltede bort.

Alangordlek og Sarkardlek ligger som omtalt i to Arme af Tasiussak. Afstanden mellem begge er ikke stor, og Landet mellem dem ikke synderligt høit, saa at man let kan gaa over fra Alangordlek til Sarkardlek. Denne sidste har i det Hele samme Udseende som Alangordlek; dog er den meget bredere og fylder meget mere op med Kalvis, saa at det er tvivlsomt, om man altid kan ro helt ind til denne Bræ, af hvilken Grund man bør søge ind til Alangordlek, naar man vil bereise disse Bræer. Alangordlek naar længere ud i Fjorden end Sarkardlek. Mellem begge ligger snefrit Land, saaledes at det fra Fjorden ser ud, som om det var let at gaa mellem begge Bræerne op til Randen af Indlandsisen, hvorfra begge Bræerne kommer. Forsøger man imidlertid at gaa hid op, saa vil man finde, at der fra Alangordlek gaar en kløftet, omtrent 2000 Meter bred Isbræ Akuleakuta paa tværs over til Sarkardlek, og da

denne Tverbræ har brede og dybe Sprækker som de andre Bræer, kunde den ikke passeres. Akuleakuta afskærer, derved at den gaar over fra den ene Isfjord til den anden, et Stykke is- og snefrit Land, der altsaa bliver liggende som en Ø, omgivet af Indlandsisen oventil, af de to Fjordbræer paa begge Sider og Akuleakuta nedentil. Akuleakuta betyder «dens (Isbræens) mellemliggende Stykke», og den benævnes rimeligvis saaledes paa Grund af, at den ligger midt imellem og forener med Is de to Isfjorde.

Bevægelsens Hastighed i Alangordlek og Akuleakuta er ikke stor; den lod sig ikke med fuld Sikkerhed bestemme i Løbet af en Dag. Ved Alangordlek oversteg den ikke 0.5 Meter i 24 Timer og ved Akuleakuta ikke 0.4 Meter i den samme Tid. Aarsagen, hvorfor Hastigheden her ikke kan angives med Nøjagtighed, er den, at hvor Bræen gaar langsomt, der bliver Forandringerne i Vinklerne fra Dag til Dag, naar de maalte Punkter ligger i flere hundrede Meters Afstand fra Grundlinien, under 1 Minut, altsaa for smaa til at kunne aflæses paa Theodoliten. Bevæger Bræerne sig langsomt, saa maa man, efter den her anvendte Methode, vente i længere Tid, før man faar Vinkler, der lader sig maale.

Torsukatak Isfjord ( $69^{\circ} 50'$  efter Dr. Rink) sender sine Isfelde ud gennem Vaigatet. Fjorden, hvor den er fyldt af Isfelde, begrænses mod Nord af den sydostligste Del af Nagsauaks Halvø, og mod Syd af Nordsiden af Arveprindsens Eiland samt to andre Øer Kekertarsuak og Ana, mellem hvilke Øer der gaar tre Løb ind til Sundet mellem Arveprindsens Eiland og Fastlandet. Om det er muligt om Sommeren at komme frem til Bræen i denne Isfjord ved at søge ind i dette Sund er mig ubekjendt. Fra Kolonien Ritenbeuk er det under gunstige Omstændigheder muligt at komme ind til Nordsiden af den faste Bræ ad følgende Vei: Fra Ritenbenk ror man over til Udstedet Kekertak, paa hvilken Vei man har at passere over Isfjordens Udløb i Vaigatet. Denne Vei

er undertiden om Sommeren vanskelig om ikke umulig at passere, idet her kan vare saa pakket med Kalvis og Isfjelde, at man ikke slipper over. Den 21de Juli 1875 var det dog ikke forbundet med store Vanskeligheder, skjønt man havde at passere mellem mange Isfjelde i deres umiddelbare Nærhed, hvilket er farligt, da disse ofte skifter Beliggenhed, hvorved de dels knuses, dels sætter Havet i heftig Bevægelse. **Kekertak** ligger i en Sidefjord til Isfjorden, og man ror helt ind til Bunden af Sidefjorden. Herfra er der henimod et Par Miles Vei til og langs en Indsø ved Navn **Amalortok** (den runde) og senere langs en meget stor Indsø, **Taserssuak** (den store Sø). Denne skal passeres, og da Landet her er ubeboet, maa man føre Baade med sig. Til at føre en større Konebaad med sig hele denne lange Vei skal der mange Folk, af hvilken Grund det er bekvemmere at føre med sig 3 Kajaker, hvilke man kan binde sammen til en Flaade, paa hvilken man da i stille Veir kan føre Folk og Proviant over Søen. Et Stykke nærmere mod Isfjorden ligger en anden mindre Sø, **Amitsok** - den smale (Sø), og da Elven fra denne ikke altid lader sig vade, saa bør man ogsaa føre et Par Kajaker hid for at komme over denne Indsø, ovenfor Elvens Udløb. **Amitsok** er skilt fra **Torsukatak** ved en Fjeldryg paa 1000 Fod; fra Toppen af denne Ryg kan man se ud over Isfjorden, og ved Foden af samme er der Anledning til at komme ud paa Bræen, endskjønt denne ligesom **Jakobshavns Isfjord** kun kan passeres langs Kanterne; dog er **Torsukatak Bræ** mindre kløftet og pigget end **Jakobshavns Bræ**.

Ved **Torsukatak** udgyder sig i Havet 4 Isbræer eller, om man vil, 5, idet den næstnordligste ved smaa Øer i Isen er delt i flere Grene. Dannelsen af Isbjerger foregaar fornemmelig i den nordligste af disse Arme, idet de andre Arme kun synes at danne smaa Isbjerger. Mellem hver to Bræer ligger et Stykke Land, der altsaa er begrændset af Indlandsisen oventil, Bræer eller Arme af Bræen paa 2 Sider og af Havet eller Fjorden nedentil.

Sidemorænerne er smaa. Isen ender med en lige, lodret Kant paa omtrent 15 Meter ud imod Fjorden. Bredden er omtrent 9000 Meter. Fjorden udover er pakket med Isfjelde og Kalvis og er følgelig ikke at bereise om Sommeren. Selve Bræns Længde, hvis man ved dens Længde forstaar den Strækning, paa hvilken den er omgivet af Land paa begge Sider, er kun kort, neppe længere end Bredden. Heldningen af Bræns Overflade naar ikke op til 2°. Som ved Jakobshavns Isfjord laa der kun Stene og Snavs langs Kanterne, medens de midtre kløftede Partier af Bræen var fri for erratiske Blokke. Grænsen mellem Isbræen og de foran liggende Isfjelde var tydelig og let at iagttage.

Hastigheden af Isbræns Bevægelse maalttes paa samme Maade som ved Jakobshavns Isfjord, og Resultaterne er angivne i høstaaende Tabel.

Punktets Navn.	Tid, Dag og Klokkeslet, da Maalingerne foretoges.	Antal af Timer, hvori Punktet har bevæget sig.	Længde af det gennemløbne Rum i disse Timer.	Hastighed af Punktet pr. Time.	Hastighed af Punktet pr. Døgn.	Afstand af Punktet fra Fjordsiden.
		Timer.	Meter.	Meter.	Meter.	Meter.
I	Fra 24de Juli 12 Middag til 25de Juli 9 F. . .	21	3.28	0.156	3.75	210
II	Ligesaa	21	4.95	0.236	5.66	367
III	Ligesaa	21	7.72	0.368	8.82	1926
IV	Ligesaa	21	8.84	0.421	10.10	4070
V	Ligesaa	21	8.89	0.423	10.16	4939
VI	Ligesaa	21	8.18	0.390	9.35	4968

De tre sidste Maalinger er neppe nøiagtige paa 1 Meter i Døgnet, da den hele Forandring i Vinkler i Løbet af 21 Timer beløb sig til 7 Minutter.

Det fremgaar af de ovenfor anførte Tal, at Bræen i Tor-sukatak bevæger sig med en fra Kanterne mod de midtre Partier tiltagende Hastighed. Videre at Bevægelsen i de midtre Partier naar op til 10 Meter, og at altsaa Hastigheden er omtrent halvt saa stor som i de midtre Partier af Jakobshavns Isfjord.

Fjorden Kangerdlugssuak i Umanaks Distrikt ligger omtrent paa  $71^{\circ} 15'$  nordlig Bredde. Det er en Isfjord af middels Størrelse, der sender ud Isbjerger, dog ikke i saa stort Antal, at de lægger Hindringer i Veien for Farten. Reisen ind til Bunden af Kangerdlugssuak fører forbi særdeles interessante og imponante Landskaber. Saavel Uperviviks Ø som Halvøerne mellem Kangerdlugssuak og Kangerdluarssuk og mellem Kangerdluarssuk og Ingnerit-Fjorden udmærker sig ved sine talrige Tinder, der som tidligere omtalt stiger steilt fra Fjordsiden op indtil 2000 Meter. Fjeldene danner her dristige Alper, der ofte er udstykkede til naaleformede Pigge, og midt imellem disse Tinder stiger den ene Isbræ ved Siden af den anden ud fra Smaadalene. Disse Bræer danner dels Faldjækler (Glacières remanière), dels stiger de fra Høiderne lige ned i Havet, dels kommer de ud af skumle Botner, hvis steile Sider beskytter Sne- og Ismasserne mod den grønlandske Sommersol. Det er neppe muligt at tænke sig et Landskab mere oversaaet med Bræer end dette; paa Veien fra Indløbet mellem Uperviviks Ø og Fastlandet og indtil Bunden af Kangerdlugssuak er der en god Dagsreise, og paa denne Vei passerer man ikke mindre end 47 Isbræer, der kommer ned langs Fjordsiderne, og desuden ender selve Fjorden som sædvanligt i en mægtig Bræ, der fylder ud Fjorden fra Bred til Bred. Fig. II paa Pl. II fremstiller et Kart over de indre Dele af Fjorden Kangerdlugssuak. Kartet, der ikke grunder sig paa Maalinger, men kun støtter sig paa et under Reisen taget Rids, gjør ikke Fordring paa Næagtighed, men hidsættes kun for at give en Forestilling om Landets

Konfiguration og Isbræernes Optræden langs Siderne og i Bunden af Fjorden. Om man tænker sig de talrige Bække, der hænger ud over de bratte Fjordsider i Norge, forvandlede til mægtige og imponante Bræer, saaledes at hver Elv blev til en Bræ, saa vil man kunne danne sig en Forestilling om Kangerdlugssuak. Vi vil søge ind til Bunden af Fjorden til den mægtige Isbræ. Bergarterne paa Veien ind imod Kangerdlugssuak bestaar i de yderste og vildeste Dele i Sundet mellem Uperniviks Ø og Fastlandet af Gneis langs Fjorden; men at en anden Bergart staar i Høiderne, er vel muligt. Et Stykke inde i Kangerdlugssuak træffer man paa en Formation af Lerskifere, Lerglimmerskifere og Kvartaskifere, der nærmere ind mod Bunden atter afløses af Grundfjeldets Bergarter. Længere inde i Fjorden bliver Fjeldene noget lavere og mildere i sine Former, men de danner dog steile Fjordsider, der undertiden styrter ned i Havet med Vinkler paa 80 Grader, med Høider paa 1000 Meter og derover. Afstanden fra Mundingen af selve Kangerdlugssuak ind til Bræen kan anslaaes til 4 à 5 geografiske Mil; kun paa faa Steder er der paa denne Vei Anledning til at lande, og inde ved selve Bræen er det ogsaa forbundet med Vanskeligheder at finde en Landingsplads. Fjordsiderne gaar nemlig ogsaa her steilt ned i Havet. Selve Bræen i Fjorden gaar ud i denne med en brat Kant, der løber convext ud i samme, saaledes at de midtre Partier af Bræen gaar indtil 20 Minutters Roning længere ud i Fjorden end Bræens Sider. Man bør derfor, om man vil finde Landingsplads, ro forbi Enden af Bræen, der gaar ud i Fjorden, helt ind til det Sted, hvor Morænen gaar ud i Fjorden paa dennes Nordside, hvor der da er Anledning til at lægge Baaden for Anker og at slæbe Teltet op paa Toppen af selve Morænen; der vil man finde en Teltplads bekvem for Iagttagelser, om den end i andre Henseender kan være ubekvem,

idet Enden af Bræen udenfor kan kalve, og den ved Kalvningen indtrædende Søgang kan ødelægge Baaden \*).

Udseendet af selve Bræen Kangerdlugssuak er som Jakobs-havns og Torsukataks. Bræen er sanderkløftet i Ispigge og Tinder, saa man ikke kan gaa tvert over den; den er i de midtre Partier fri for erratiske Blokke; saadanne optræder langs Kanterne. Men medens Sidemorænerne langs de andre store isfyldte Fjorde er smaa, saa er Morænen langs Kangerdlugssuak ikke ubetydelig, idet den hæver sig til Høider, der varierer mellem 10 og 25 Meter. Udsigten fra Toppen af denne Moræne er eiendommelig. Paa hver Side af Bræens Ende, der som omtalt gaar med en lodret kløftet Kant convext ud i Fjorden, sees i Høiderne to Faldjækler, der afvejlende sender sine Ismasser med Bulder ud over Fjeldsiderne, og længer ud over Fjorden sees de mange Bræer, som man paa Reisen har passeret. Paa Sydsiden af Fjorden sees en Dal at skjære mod Syd maaske over til Kangerdluarssuk, i hvilken Dal fem store Bræer søger ned fra Siderne. Ser man opover Bræen, saa kan Morænen følges en lang Strækning; men Udsigten til Indlandsisen er delvis spærret derved, at høie øformige Landstykker («Nunatakker») ligger ovenfor Bræen, (se Fig. II), og igjennem Sundene mellem disse Øer paa Isen skjærer de Arme af Indlandsisen sig frem, der forener sig til Kangerdlugssuak Bræ. Disse Nunatakker hæver sig, som tidligere berørt, til Høider paa tusinder af Fod med steile Vægge som Fjordsiderne og forholdsvis flade ovenpaa. Indlandsisen ved Foden af dette forholdsvis snefrie Land ligger altsaa saare meget lavere.

Dels paa selve Morænen, dels paa Bræen, dels paa det

\*) Man bør derfor have med sig en Kajakroer og en Kajak, hvilken sidste bør drages paa Land, for at man, i Tilfælde af at Baaden skulde ødelægges, kan sende Bud til Kolonierne, og ikke blive ganske afskaaren. Forøvrigt bør det bemærkes, at Forandringerne i Isfjordene fra Aar til Aar er store, saa at Forholdene ved Enden af Bræen i Kangerdlugssuak om kort Tid kan være ganske andre end de her beskrevne.



fast Land ved Siden af Bræen lykkedes det mig at komme en Mil opad langs Bræen i Kangerdlugssuak, men her hindredes jeg i at komme frem videre, idet Bræen her gik lige ind til den høie, ganske steile Fjordside; Bræen var paa dette Sted gjennemsat af gabende Kløfter, og Morænen forsvandt der, hvor Bræen gik hen til Fjeldsiden. Smukke Friktionstriber saaes paa Fjeldsiden lige ved Bræen i Kangerdlugssuak. Det var min Hensigt med den omtalte Vandring langs Bræen at forsøge paa at trænge frem til den nordenfor liggende store Isfjord Umiamako, idet jeg først vilde gaa op langs Bræen i Kangerdlugssuak, og saa vandre nordover langs Indlandsisen, indtil jeg kunde søge op i Høiderne, hvor der var Udsigt over Umiamako. Vandringen standsede omtrent ved det Sted, hvor Fjeldvæggen, der begrænses af Bræen i Kangerdlugssuak, bøier nordligt, og Kløfterne i Indlandsisen eller Bræen ovenfor synes her at være mange og store, rimeligvis af den Grund, at de to Øer eller Nunatakker i Isen ovenfor tvinger de Ismasser, der skal føres ud i Kangerdlugssuak, ind gennem smalere Sund, hvorved Bevægelsen bliver større, og Sprækkerne derfor flere og større, end Tilfældet pleier være op imod Indlandsisen. Jeg formaar ikke at angive nogen Vei, ad hvilken man om Sommeren skal kunne komme ind i Umiamako. Ad den af mig forsøgte Vei turde det maaske være muligt at komme frem, naar man var vel udstyret med Stiger, Touge og europæiske Ledsagere, skjønt det visselig vilde være forbundet med stort Besvær. Lettere vilde det maaske være at søge at bestige Nordsiden af Kangerdlugssuak et Stykke udenfor Bræen, og herfra at gaa over til Sydsiden af Umiamako, skjønt Fjeldsidernes Steilhed i Forbindelse med, at Bræer udfylder de dalformige Fordybninger, vil gjøre denne Vandring besværlig.

De mægtige Bræers Optræden i stort Antal i Nordgrønland er saa meget mere mærkværdig, naar vi erindrer, at Landet ikke har noget fugtigt Klima. Som tidligere anført udgjorde Regnhøiden ved Jakobshavn fra Juli 1873 til Juli 1874 219.7

Millimeter, fra Juli 1874—75 183.7 Millimeter. Den Kjendsgjerning, at Nordgrønland har et tørt Klima, er ikke uden geologisk Betydning, idet det viser, at det ikke er nødvendigt at forudsætte store Regnhøider eller Snehøider i den ældre geologiske Tid, da andre Lande havde lignende glaciale Tilstande, som det nuværende Grønland.

En anden mærkelig Omstændighed ved Isforholdene i Nordgrønland er, at Bræerne næres og vedligeholdes fra en Ismark, der paa store Strækninger ialfald ligger lavere end den Grændse, man finder for den evige Sne. Man er i Nordgrønland ofte i stor Tvivl om, hvad man skal kalde Grændserne for den evige Sne. Paa sine Steder i Umanaks Distrikt, til Exempel paa Uperviviks Ø, kunde man i Midten af August Maaned finde Dynger af aarsgammel Sne ved Havet, og da Sneveir kort efter indtraf, kan det vel siges med Sikkerhed, at Snemasser bliver liggende fra Aar til Aar i Umanak Distrikt i Havets Niveau. Imidlertid vilde det derfor vare saare urigtigt at sætte Snegrændsen i Umanaks Distrikt i Havets Niveau, som følgende Forhold vil vise. Nær de kulførende Skifere og Sandstene ved Uperviviks Næs<sup>1)</sup> fandtes midt i August perennerende Sne-dynger nær Havets Niveau. Men fra disse kan man stige indtil 720 Meter i Høiden uden at finde en eneste Sneklat. Høiere op i 750 Meters Høide træffer man et Plateau, der er snefrit, og som hæver sig helt til 890 Meter uden at være bedækket med Snemarker. Paa Upervivikøens Sydside maatte derfor Grændsen for evig Sne sættes høiere end 890 Meter. Betragter man Fjeldene paa den modsatte Side af Umanaksfjorden østenfor Fjeldet Kilertingualk, saa vil man iagttagte, at kontinuerlige Snemasser optræder først i Høider over 700 Meter, og at den Linie, hvor Sneen begynder, ligger i forskjellig Høide paa for-

<sup>1)</sup> Disse Skifere fører fossile Planter, saaledes som de andre kulførende Dannelser i Nordgrønland. Planteresterne optræder i lavere Niveauer i Skifere og Sandsten. En mægtig Sandstenformation ligger over dem, og den samlede Mægtighed af Skifere og Sandstene her udgjør circa 800 Meter.

skjellige Steder langs Fjordsiden. Saaledes ligger den over Sermiarsut paa Sydsiden af Umanakfjorden i en Høide af 970 Meter, mellem Bræerne Assakak og Umiartorfik i 800 Meters Høide, mellem denne og Bræen Sorkak i 760 Meters Høide. Sammenholder man disse Høider for Snegrænsen med de Høider, hvori Indlandsisen, der nærer Bræerne, ligger, saa vil man finde, at de Steder, hvor Indlandsisens Høide er maalt, stadigt ligger lavere end de Høider, hvori kontinuerlige Snemasser optræder paa Grønlands Yderland. Indlandsisen ved Pakitsok ligger i 251 Meters Høide; ved Vandringen indover Indlandsisen i Aaret 1870 naaede Prof. Norden skjöld en Høide af 2200 Fod (690 Meter). Uden nogen Maaling kan man overbevise sig om, at Indlandsisen ligger lavere end Grændserne for den evige Sne ved at betragte Fjeldene, hvor de hæver sig foran Indlandsisen. Man vil da finde, at Fjeldene er snefrie indtil store Høider over Indlandsisen. Dette Forhold er skikket til at vække Tvivl, om Indlandsisen og de mægtige Bræer vilde komme igjen under de nuværende klimatiske Tilstande, hvis man tænkte sig dem bortskaffede.

Særdeles mærkelig er den Hastighed, hvormed Isbræerne bevæger sig i de Isfjorde, der producerer Isfjelde. Som tidligere omtalt bevæger Jakobshavns Isfjord sig med en Hastighed af indtil 20 Meter i Døgnet, Torsukatak med en Hastighed op til 10 Meter, hvorimod Isfjorden Alangordlek, der kun producerer meget smaa Isfjelde, ikke har en Hastighed af 0.5 Meter. Denne Hastighed har Betydning for Spørgsmaalet om Aarsagerne til Bræernes Bevægelse. Det synes først af de anførte Tal at fremgaa, at Bræernes Bevægelse ikke fortrinsvis betinges af Heldningen af Underlaget. Thi Jakobselvns Isfjord har kun  $\frac{1}{2}$  Grads Heldning, ved Torsukatak naar Heldningen ikke op til 2°. Sammenligner man imidlertid Hastighederne i disse Bræer med Bevægelsen hos Bræer i Norge med meget større Heldningsvinkler, saa vil det fremgaa heraf, at Skraaningen af Underlaget ikke kan være den væsentligste Betingelse for

Bræernes Hastighed. Boiumbæren i Fjærland i Sogn har efter Hr. de Seue<sup>1)</sup> Heldningsvinkler fra 10° til 30°, og dens Maximumshastighed er i de midtre Partier 20,88 Tommer (= 0.546 Meter) i Døgnet. Aarsagen til den forskellige Bevægelse i de forskellige Fjorde synes nærmest at maatte være den, at den ene Fjord har større Mængder Is, som skal føres til Havet, end den anden. Med andre Ord, at Bevægelsernes Hastighed afhænger af Trykket af Ismasserne, der nærer Bræen. Skal en trang Fjord, som Jakobshavns Isfjord, føre store Ismasser ud, saa forøges Hastigheden ved selve Ismassernes Tryk. Kan Fjorden eller Bræen dele sig, saaledes som Torsukatak, saa formindskes Hastigheden i hver enkelt Arm. Men hvis en Bræ har et ringe Nedbørdsdistrikt, som de mindre isfyldte Fjorde, da aftager Bræens Hastighed i Forhold.

Endskjønt de fundne Hastigheder hos Isbræerne i Fjordene er store, saa vil de Tidsrum, der hengaaer fra den Tid, da Sneen falder paa Grønlands Indland, indtil den naar frem til Havet, være saare betydelige. Om vi kun betragte den korte Strækning fra Enden af Jakobshavns Isfjord og op til det Sted, hvor Fjordsiderne forsvinder op imod Indlandsisen, hvilken Strækning beløber sig til 21 Kilometer (2,8 Mil), saa vil, med en Gjennemsnitshastighed af hele 15 Meter, Isen behøve omkring 4 Aar for at bevæge sig denne Strækning; for de Snemasser, der falder paa de indre Steder af Grønland, og som ikke bortsmelter, maa der hengaa meget lange Tider, før de naar frem til Havet. Betragtes Afstanden mellem Uperviviks Isfjord i Nordgrønland paa Vestkysten indtil Kaiser Franz Josephs Fjord paa Østsiden, begge paa omkring 73° N. B., saa er Afstanden mellem disse to Fjorde fra Øst til Vest omtrent 890 Kilometer (eller 120 Mil). Falder der Sne i det indre af Grønland omtrent midt imellem begge de nævnte Fjorde, saa skal denne Sne, omgjort til Is, passere mindst 450 Kilometer til den ene eller anden

<sup>1)</sup> Le névé de Justedal et ses Glaciers 1870.

Side forat naa Havet som Is, hvis den ikke smelter paa Veien. Tænkes nu, at det for en stor Hastighed gunstigste Tilfælde indtræder, nemlig at Sne falder paa et Sted, hvor der er en Hastighed saa stor som i Jakobshavns Isfjord, hvor altsaa Isen bevæger sig med 15 Meters Hastighed om Dagen, saa vilde der dog behøves 29666 Dage, eller over 81 Aar, førend de midt i Grønland dannede Ismasser naar til Fjordbunden og da det neppe er tænkeligt, at der paa selve Indlandsisen er en Hastighed, der kan maale sig med den i isfyldte Fjorde, saa synes der at maatte hengaa Aarhundreder, førend Ismasserne i Grønlands Indre naar frem til Enden af de isfyldte Fjorde. Rimeligvis smelter i disse lange Tidsrum den største Del af Isen, og da forholdsvis mest af den Is, der har den længste Vei at passere, hvoraf igjen skulde følge, at det er de Snemasser, der falder nærmest mod de isfyldte Fjorde, der bidrager mest til at danne Bræerne og Isfjeldene.

Mange Grønlændere mener at have gjort den Erfaring, at Isbræerne stadigt voxer udover deres Land, og at Landet som Følge heraf i Tidernes Løb skulde blive endogsaa mere uskikket til Beboelse end Tilfældet for Tiden er. Naturligvis maa man forat komme til et Resultat i saa Henseende besøge samme Isfjord gjentagne Gange med lange Mellemrum og da undersøge, om Enderne af Bræerne har skudt længere frem, Iagttagelser, som det kun i faa Tilfælde kan være Anledning for en og samme Reisende at anstille. Dr. Rink har i sit udmærkede Arbeide over Grønland leveret et Kart over de paa Sydsiden af Umanaksfjorden liggende Bræer, og for flere af dem angivet den Afstand, hvori de ligger fra Havet. Jeg har havt Anledning til at besøge disse Bræer og til at gjøre mig bekendt med den Forandring, som er foregaaet med deres Beliggenhed. Dr. Rink optog Kartet over disse Bræer i Maanederne Februar og Marts 1850; i Aaret 1875 i August bereiste jeg dem, saa at de i det følgende omtalte Forandringer af

disse Bræers Endepunkter er foregaaede i Løbet af lidt over 25 Aar.

Tuaparsuit (de store Rullestene) er den nordvestligste af de af mig besøgte Bræer paa Sydsiden af Umanaksfjorden. Dr. Rink angiver dets Afstand fra Havet til omtrent  $\frac{1}{4}$  Mil, og Beliggenheden af dens Endepunkt er ikke saa væsentligt forandret, at jo ikke den angivne omtrentlige Afstand fra Søen endnu gjælder. Bræen er i høi Grad snavset og fuld af erraticke Blokke. Sidemorænerne, der dannes af Blokke af Gneis og Basalt, strækker sig et Stykke nedenfor Bræens Ende, og viser saaledes, at Bræen fordum har havt en større Udbredelse. Disse Sidemoræner, der strækker sig i en tredobbelt Række langs Bræen, er, som alle Moræner ved disse Bræer paa Sydsiden af Umanaksfjorden, meget høie, og den længst ifra Bræen liggende hæver sig til 75 Meter over Bræens Underkant ved dens Ende, den midterste hæver sig til 52 Meter. Mægtigheden af Bræen maa anslaaes til hele 100 Meter; Høiden af Bræens Underrand er 200 Meter over Havet. Den ender med en lodret Væg, ud af hvilken der kom et Par Smaabække høit over Bræens Underlag. I den lodrette Væg, hvormed Bræen ender, sees Lag eller Afledningsflader; nær Bunden af Bræen viste disse Lag eller Afledningsflader sig i den Grad bøiede, at de paa to Steder viste fuldkomne Inversioner, hvilket synes dels at maatte antyde, at Bevægelsen i Isens Masse kan være meget compliceret, dels at vise, at Isen i Bræen er i ikke ringe Grad plastisk. I de Lag eller Afledningsflader, som hyppigt er at iagttage hos de Bræer, der ender med en lodret Væg, eller som gaar med en lodret Kant ud i Havet, har jeg oftere iagttaget Bøininger, og undertiden kan man tydeligt se disse Lag forme sig i Lighed med Formen af Underlaget.

Sermiarsut. Omtrent  $\frac{1}{4}$  geografisk Mil SV. for Tuaparsuits Dal ligger den mægtige og imponante Bræ Sermiarsut med en uhyre Moræne. Bræen gaar nu ligesom i 1850 helt ud i

Havet og ender her med en høi Kant. Man behøver hele 10 Minutter forat ro forbi denne Bræ, der kun udfylder en Dal, ingen Fjord, og som ikke næres af Indlandsisen, men af Ismasserne paa Nûgssuaks Halvø. Fra denne Bræ falder der næsten stadigt Stene ud i Havet. Bræen er i høi Grad kløftet. Mærkeligst er den høie Moræne, som denne Bræ har dannet. Morænen bestaar af Gneis- og Basaltstene og hæver sig stærkt skraanende med en Gang op til en Høide af 183 Meter (583 Fod); dette er den høieste Moræne, jeg nogensinde har havt Anledning til at se ved nogen Bræ. Den er tillige af en meget ånselig Bredde og er gjennemsat af enkelte Forsænkninger; i den ene af disse laa oppe paa Morænen en liden Sø eller Dam uden Afløb. Enkelte Dele af denne Moræne hæver sig maaske til en endnu større Høide. Selve Bræen naar nær sit Udløb i Havet op til samme Høide som Morænen, saa at Bræens Mægtighed vel kan anslaaes til 150 Meter et kort Stykke ovenfor Enden.

Assakak. Ikke langt fra Sermiarsut ligger Bræen Assakak, hvis Afstand fra Søen Dr. Rink angiver til 400 Alen (251 Meter) i Aaret 1850. Denne Bræ, hvis nederste Ende nu er i den Grad bedækket med Sten, at man paa enkelte Steder ikke ved, om man staar paa Morænen eller Bræen, ligger nu med sin Ende 500 Meter fra Havet, hvoraf følger, at den i 25 Aar har trukket sig omtrent 250 Meter tilbage, hvilket giver en aarlig Tilbagegang af mellem 10 og 11 Meter. Det er bekjendt, at denne Bræ paa sin Overflade fører forkullede og forkislede Træstammer med Stykker af Basaltseiler med sig. Da dens Overflade er saare jævn, kan disse Stammer følges opover; Træstammerne fortsætter i det mindste 1 geografisk Mil opover; thi saa langt fulgte jeg dem. Efterhaanden som man kom opover, blev Mellemrummet mellem de forkullede Stammer større, hvilket vel har sin Grund i, at Bræen aftager i Hastighed nærmere mod Enden, hvoraf Følgen bliver, at

Gjenstande, som med visse lige lange Mellemrum lægges paa Bræen, efterhaanden kommer nærmere og nærmere, indtil de samles i Morænen. De forkullede Træstammer blev fulgte indtil en Høide af 620 Meter; her var Bræen dækket med Nysne. Assakak synes at maatte frembyde en nogenlunde bekvem og visseligen interessant Vei ind til det Indre af den lidet undersøgte Nûgssuaks Halvø. Forsaavidt som en saadan Reise skulde have det Formaal at opsoge Moderstedet for de forkullede Stammer, bør man vælge en Tid, da Fjeldene ikke er dækkede med Nysne; thi denne skjuler i Høiderne ofte de Træstammer, der ligger som Veivisere. Høiden af Bræens Endepunkt er omtrent 50 Meter over Havet:

Umiatorfik, den nordvestligste og største af de to Bræer, som Dr. Rink benævner saa, gaar ligesom Sermiarsut ud i Havet med en brat Kant, og har ligesom denne høie Side-moræner. Ved Lavvande kan man se, at den hele Bræ hviler paa Stene. Rink angiver, at den naar med en halvkredsformet omtrent 2000 Alen lang, 100 à 160 Fod høi Kant ud i Søen, og anfører fremdeles, at der synes at være saa lav Grund foran Randen af Jøkelen, at større Brudstykker af Is, selv om de dannedes, slet ikke vilde flyde bort. Da nu som omtalt den af Stene bestaaende Bund er synlig ved Lavvande, synes Bræen heller at have trukket sig tilbage end at være skredet frem, hvis ikke selve Stranden foran Bræen er blevet grundere ved de fra Bræen faldende Stene. Nogen større Forandring synes denne Bræ ikke undergaaet siden 1850.

Umiatorfik (den mindre og sydøstlige) gaar med en smukt hvælvet Overflade ned indtil en Afstand af 322 Meter fra Havet. Efter Dr. Rink var Afstanden i 1850 6 à 800 Alen (altsaa imellem 376 og 502 Meter). Efter dette synes Bræen at være skredet lidt, men ikke betydeligt fremad. Hvis dens Afstand i 1850 var 700 Alen (439 Meter), saa skulde den have skredet 109 Meter fremad, eller ikke fuldt 4 Meter om Aaret.



**Sorkak**, den sydøstligste af de her omtalte Bræer, afgiver det mærkeligste og mest iøinefaldende Exempel paa, hvilke Forandringer Bræerne kan undergaa i ikke lange Tidsrum. Dr. Rink beskriver denne Bræ saaledes: «**Sokak**, den østligste, er i den stærkeste Afsmeltningstilstand; den yderste Kant er ganske forsvunden under det Grus og de Stene, som have været inde-sluttede i Isen, og som blive liggende paa den, efterhaanden som den smelter, ligesom man ser, at gammel Sne, der har ligget længe og tørt, gjerne er smudsig af Jord og Støv. Først flere hundrede Alen fra Stranden, hvor der staar en Hustomt, sees den faste Is at skimte frem af denne Bedækning. Grøn-lænderne fortælle, at den tidligere skal have gaaet helt ned til Søen, og der alaaet Revner i Isen om Vinteren ved sine Kalvninger.» Jeg fandt **Sorkak** gaaende ud i Havet med en Kant paa omtrent 25 Meters Høide og med en mægtig Moræne. Nær sin Ende synes Bræen at have en Mægtighed paa 50 Meter. I den korte Tid af 25 Aar har altsaa denne Bræ gaaet flere hundrede Alen frem og ud i Havet med meget stor Mægtighed. Medens den tidligere, ligesom **Assakak** nu, med sin Kant har ligget ganske forsvunden under Grus og Sten, saa staar den nu ud i Havet med en kløftet og ren Ismasse. Bræen har altsaa som af Grønslænderne anført først gaaet ud i Havet, saa har den havt en Tilbagegangsperiode, indtil den i de sidste 25 Aar atter har skredet frem til Havet.

Naar vi samler, hvad der ovenfor er anført, om disse Bræers Beliggenhed, saa sees det, at en har skredet et godt Stykke tilbage, en har gaaet et lidet Stykke frem, og en tredie har skredet et betydeligt Stykke frem, og for de andres Vedkom-mende lader der sig ikke med Sikkerhed drage nogen Slutning. Nogen almindelig Overhaandtagen af Isen i Grønland lader sig ikke udlede af disse Iagttagelser; thi netop om den Bræ, der har skredet længst frem, **Sorkak**, foreligger der tillige Beret-ning om, at den for ikke lang Tid siden har trukket sig tilbage. En Ting viser dog disse Iagttagelser, nemlig at man ikke fra

et eller et Par Tilfælde maa generalisere til en almindelig Regel om Isens Tiltagen. Thi det fremgaar af, hvad der ovenfor er anført, at nærliggende Bræer kan i samme Tid have en forskjellig Bevægelse, saa at om man end ved en eller flere Isfjorde mener at have iagttaget en Fremadskriden af Isens Endepunkt, saa er man deraf ikke berettiget til at slutte, at Isen overalt tager til. Og vistnok kan der i Grønland i de isfyldte Fjorde vises Exempler paa, at Bræernes Endepunkter gaar baade frem og tilbage. Udenfor Alangordlek ligger der saaledes, omtrent 1 Times Roning udenfor dens nuværende Ende, en Moræne, der viser, at Bræen engang har strakt sig hid. Et Exempel i modsat Retning synes Bræen ved Pakitsok at vise, at dømme efter den Tegning og Beskrivelse, som Dr. Rink giver af samme. Det omtales her, hvorledes en Forgrening af Indlandsisen hænger nedover Dalens ene Sidevæg med 5 Flige af blaalig Is, stærkt kløftede og sønderrevne, samt snavsede af iblandede Stene og Grus. De ligne, siges der, i Formen uhyre Laller med Klør, der ligesom er trykkede fast ind i den bratte Væg forat holdes svævende over Dalen, som de vistnok i Tidernes Løb vil voxe udover og derved indlemme den i Indlandets store Isærken. Dalen er nu fyldt af Bræen, saaledes at denne ligger kun nogle faa Meter over Havet, kun adskilt fra samme ved en kort Strækning, der er bedækket med Rullestene. Isblokke, der skulle løsrives fra Væggene og ligge nedrullede over den med Vegetation bedækkede Overflade, saaledes som af Dr. Rink omtalt, saaes ikke, saa at den her omtalte lille Dal allerede i det korte Tidsrum af 25 Aar synes at være indlemmet i Indlandets store Isærken.«

Med Hensyn til de isfyldte Fjorde, der udsender Isfjelde, da synes intet rimeligere end at disse i korte Tidsrum forandrer Beliggenheden af sit Endepunkt; man maa erindre, at Bevægelsens Hastighed nær Endepunktet i de midtre Partier af Jakobshavns Fjord naar op til 20 Meter, og naar saa Bræen ikke har kalvet paa tre Dage, saa vil Endepunktet af Bræen

ligge hele 60 Meter længer fremme end 3 Dage tidligere; og da det vel er tænkeligt, at Bræen til sine Tider er mere gjennemsat af Kløfter end til andre, hvilket beforder Kalvningen, saa er det saare naturligt, at Kalvningen kan finde Sted paa meget forskjellige Steder. Den af mig iagttagne, senere omtalte Kalvning fandt Sted lige ud for Tivsarigsøk, men denne Del af Isbræen synes af de ældre Iagttagere at være betragtet som liggende langt ovenfor Bræens Endepunkt.

Om Isfjeldene og deres Dannelse. Isfjeldenes Udseende er saa ofte beskrevet, at det turde være overflødigt nærmere at omtale samme. Det er almindeligt bekjendt, at de er af de forskjelligste Former, at de danner Masser, der er sammenlignede med Slotte, Taarne, Kirker, Skibe for Seil o. s. v., at man ofte finder dem mer eller mindre spidse og takkede, dels mere kubiske med steile Sider og med et fladt Plateau paa Toppen, at man hyppigt ser dem gjennemsatte af svære Aabninger som Porte tvertigjennem o. s. v. Jo længere man kommer ind i de store Havbugter i Nordgrønland, som Diskobugten, Vaigatet og Umanaksfjorden, desto talrigere bliver Isfjeldene, og søger man ind i Isfjordene, saa optræder Isfjelde og Brudstykker af samme saa talrigt, at det er umuligt at ro ud gennem Fjorden, saaledes som omtalt.

Overfladen af de fleste Isfjelde er ren, uden Stene; nu og da ser man et Isfeld med Stene paa, og hist og her mindre Isfjelde, der er helt bedækkede med Stene og Snavs.

Den øiensynligt rigtige Forklaring af Isfjeldenes Dannelse er givet af Dr. Rink i det tidligere omtalte Arbeide over Grønland, idet det her paavises, at Isfjeldene dannes, idet Bræerne i Isfjordene bevæger sig udover, indtil de kommer paa dybt Vand, hvor Bræen flyder, og at Stykker da af denne løsriver ved Vandets Opdrift.

Tidligere gjorde man sig den Forestilling, at Isfjeldene rullede ud i Havet fra Isbræerne. At man saa længe kunde blive staaende ved denne Forklaring, har vel sin Grund deri, at de

Isfjorde, hvor Isfjeldene dannes, er vanskelige at bereise om Sommeren, saa at de tidligere Reisende, der mest færdedes paa Havet, ikke søgte ind i Isfjordene. Selv Capt. Graah, der har foretaget sin bekjendte Reise til Østkysten af Grønland, udtaler i sin Beskrivelse over denne Reise<sup>1)</sup> sin Forundring over, at han aldrig har seet endog et middelstort Isfjeld dannes, og det uagtet han i 15 Dage maatte opholde sig paa et Skjær foran en bred Isbræ, som han benævnte Colberger Heide:

«Det er besynderligt nok», bemærker han, «at jeg ingen-sinde har været Vidne til end ikke et maadeligt Isfjelds Kalvning fra Landisen, uagtet de mange tusinde Fjelde, som dels paa Grund dels flydende findes til alle Tider og under alle Dele af Østkysten, bevise, at slige Kalvninger maa være temmeligt hyppige. Man kunde deraf næsten ledes til at slutte, at disse Isfjelde skyldte nordligere Egne deres Oprindelse; men dette forsikre Østlænderne er ikke Tilfældet».

Forat være Vidne til Dannelsen af Isbjerge maa man søge ind i Fjordene og her vente, indtil Bræen kalver. Deslige Kalvninger har jeg havt Anledning til at iagttage 2 Gange, en Gang ved Jakobshavn og en Gang ved Torsukatak Isstrøm. Ogsaa ved Kangerdlugssuak fandt en Nat en Kalvning Sted under min Nærværelse, uden at jeg dog ved den Leilighed kunde iagttage andet end Bulderet og Søgangen.

I Tiden fra den 6te Juli om Aftenen indtil den 9de Juli om Morgen fandt kun en Kalvning Sted ved Jakobshavns Isfjord. Der er saavidt vides intet, der paa Forhaand antyder en forestaaende Kalvning; denne giver sig med engang tilkjende med en forfærdelig Bragen, og ser man da didhen, hvor Kalvningen finder Sted, da vil man opdage hvide Skyer af Vand (eller Is?), der pidskes i Veiret ved Ismassernes voldsomme Bevægelse. Samtidigt saaes ved Jakobshavns Isfjord ved Kanten af den faste Is et umaadeligt takket Stykke af Bræen at vælte

<sup>1)</sup> Undersøgelss-Reise til Østkysten af Grønland. Kbh. 1832.

sig rundt, stigende med sin ene Kant høit i Veiret foran Bræen, og idet det reiste sig, styrtede store taarnformede Dele af samme ned, opløsende sig under Faldet i lutter Smaastykker. Saa snart Kalvningen var begyndt paa et Sted i de midtre Partier af Bræen, begyndte Kalvningen ogsaa paa et andet Sted. Et stort Stykke af den faste Bræ løsenede og saaes at bevæge sig med en Hastighed, som jeg vil anslaa til mindst 1 Meter i Sekundet. Denne Bevægelse midt inde i den faste Ismasse var saa meget mere iøinefaldende, som det Stykke, der bevægede sig, ligesom den gjenliggende faste Bræ, var besat med Tinder af Is, og da alle Istinderne paa det løse Stykke bevægede sig hurtigt forbi Istinderne i den faste Is, var det desto lettere at iagttage Bevægelsen og Størrelsen af den Ismasse, der var løsnet. Jeg formaar ikke at gjøre Rede for, hvor mange Isfjelde der dannedes ved disse Kalvninger; thi saadanne fandt Sted samtidigt paa flere Steder; to store Isfjelde kunde, som omtalt, sees at løsnes fra den faste Is, men samtidigt saaes hvide Skyer af Vanddampe paa flere Steder over den brede Fjord, og desuden kom ogsaa de ældre foranliggende Isfjelde i Bevægelse, saa der herskede en usigelig Forvirring, ledsaget af en continuerlig Bragen, der dog vexlede i Intensitet. Det varede lidt over  $\frac{1}{2}$  Time, førend Ismasserne atter kom til Ro og Larmen ophørte, og mod Slutningen kom Vandet i Fjorden i en særdeles heftig Bevægelse. Kalvningen iagttoges fra Tivsarigsok og foregik udenfor denne. Som omtalt under Jakobs-havns Isfjord var Bugten Tivsarigsok bedækket med Is, dannet paa Stedet, idet Havet naar ind i denne Bugt. Dens Is steg og faldt med stor Voldsomhed ved de Belger, som reistes ved Kalvningerne udenfor, og Isen sendersloges langs Kanterne.

Den følgende Dag maalttes et af de Isfjelde, der var dannet under Kalvningen, og Høiden fandtes 89 Meter (284 Fod).

Den anden Kalvning af den faste Bræ, hvortil jeg har været Øienvidne, fandt Sted den 24de Juli ved Torsukatak Bræ; men denne var mindre storartet. Et Stykke af den faste

Is løsnede og hævede sig op foran Kanten, antagelig til en Høide af 30 Meter, væltede sig, men faldt saa pludselig i tusinde Stykker, som om det havde været Sand. Af det hele Isfjeld blev der kun Brudstykker af Is eller Kalvis tilbage. Umiddelbart efter løsnede ogsaa et andet mindre Isfjeld.

Paa Pl. II Fig. I vil man finde et idealt Snit gennem en Isfjord, der viser, hvorledes Bræen gaar ud i Havet med ca.  $\frac{1}{4}$  Dele af sit Volumen liggende under Havet. Foran samme svømmer Isbjerge, hvoraf et sees at staa paa Grund i Fjordens Munding. Alle de vertikale Afstande er meget forstørrede, saaledes at Bræen maatte tænkes omtrent 3 Gange saa lang som den er, for at de rigtige Forhold skulde fremkomme.

For tilfulde at forstaa de Phænomener, der iagttages i Isfjordene og under Isfjeldenes Dannelse, maa vi gjøre os fortrolig med Fjordenes Dybde, Bræens Mægtighed og Hastighed og Bredde, den specifikke Vægt af Vandet og Isen.

Først maa der undersøges, hvormeget af et Isfjeld der ligger over, og hvor meget der ligger under Vandet, naar Isfjeldet befinder sig i Ligevægt eller flyder paa Vandet. Naar Isfjeldet befinder sig i Ligevægt, saa er Vægten af Isfjeldet ( $P_1$ ) lig Vægten af det Volumen Vand, som den under Vandet liggende Del af Isfjeldet fortrænger, ( $P_2$ ) altsaa:

$$P_1 = P_2.$$

Men et Legemes Vægt er lig dets Volum multipliceret med dets specifikke Vægt. Kaldes Fjeldets Volum  $V_1$  og dets specifikke Vægt  $S_1$ , og Vandets Volum  $V_2$  og dets specifikke Vægt  $S_2$ , saa bliver:

$$V_1 S_1 = V_2 S_2.$$

Sættes Isfjeldets Volum ( $V_1$ ) = 1 saa bliver

$$V_2 = \frac{S_1}{S_2}$$

altsaa bliver Volumet af den over Vandet liggende Del

$$1 - V_2 = 1 - \frac{S_1}{S_2}$$

Det gjælder altsaa at bestemme den specifikke Vægt af Havvandet, hvori vedkommende Isfjeld flyder, og den specifikke Vægt af Isen i Isfjelde.

Flyder et Isstykke i rent, ferskt Vand, og er Isstykket rent, saa er Vandets specifikke Vægt 1 og Isens specifikke Vægt 0.918 (efter Brunner), følgelig Volumet af den under Vandet liggende Del af Isstykket 0.918 og den over Vandet liggende Del 0.082 eller lidt mindre end  $\frac{1}{11}$ . Saa dybt ligger imidlertid Isfjeldene aldrig; thi dels er det Vand, hvori de flyder, salt, dels er Isens specifikke Vægt i Isfjeldene i Virkeligheden meget mindre. Undersøger man nemlig Isen fra Isfjeldene, saa vil man finde, at den er gennemsat af talrige Luftblærer, hvilke naturligvis bidrager til at holde Isfjeldene høiere oppe paa Vandet. Disse Luftblærer optræder overalt i Isfjeldene, undtagen i enkelte Gange af blaalig Is, der hyppigt gennemsetter Isfjeldene paa kryds og tvers, og idet de krydser hverandre, undertiden fremkalder Forrykninger. Naar Isfjelde eller Stykker af saadanne ligger paa Havet og smelter, saa kan man se talrige Luftblærer stige op af samme, og idet den indesperrede Luft ved Isens Smeltning bliver fri og stiger op i Overfladen, saa fremkommer der et lidet Smeld, og da Luftblærerne kommer i stort Antal, saa høres paa varme Dage en stadigt knitrende Lyd, naar man ror tæt forbi et Isfjeld eller Isstykke.

Det gjælder altsaa forat finde Isfjeldenes specifikke Vægt at undersøge, hvormeget disse Luftblærer bidrager til at forringe Isens specifikke Vægt. For at bestemme dette sloges Is af 5 Isfjelde, og disse 5 Isstykker lagdes i Vand, der fortyndedes med Alkohol, indtil 3 af Isstykkerne netop sank, medens 2 netop flød. Den specifikke Vægt af denne Blanding bestemtes med et Alkoholometer. Derpaa toges ren luftfri Is op i Blandingen, og denne fortyndedes yderligere, indtil den rene Is netop hverken sank eller flød i denne Blanding, hvorpaa den specifikke Vægt af denne Blanding bestemtes. Differencen mellem

de specifikke Vægter af disse to Blandinger bliver da omtrent lig Differencen mellem den specifikke Vægt af ren Is og Isfjeldenes luftholdige Is<sup>1)</sup>. Efter Forsøg anstillede paa den her antydede Maade med Isstykker fra Isfjelde i Diskobugten fandtes det, at Isens specifikke Vægt paa Grund af Luftblæserne kan antages at aftage med 0.032, eller at Isens specifikke Vægt forringes fra 0.918 til 0.886.

Med Hensyn til den specifikke Vægt af Vandet i Isfjordene da er denne variabel. Ved Munden af Tasiussak nær Jakobshavns Isfjord fandtes den specifikke Vægt af Havvandet at være 1.0228; ved Titring fandtes en Klorgehalt = 1,602 pCt., hvad der svarer til en Saltmængde = 2,901 pCt. En halv Mil indenfor Tasiussaks Munding fandtes en Klormængde = 1,411 pCt., = hvad der svarer til en Saltmængde af 2,555 pCt. og en specifik Vægt = 1,0199. Tasiussak har ingen andre Tilløb fra Havet end gennem Jakobshavns Isfjord, og den specifikke Vægt i Tasiussaks Vand er derfor ikke større end Vandet i Jakobshavns Isfjord. Sættes altsaa efter disse Iagttagelser den specifikke Vægt i Isfjeldene til 0.886 og af Vandet i Jakobshavns Isfjord til 1.0228, saa faaes, at af et Isfjeld ligger der 86 Dele under og 14 Dele over Havet, eller at Volumet af den over Havet liggende Del af Isfjeldets Volum udgjør omtrent  $\frac{1}{4}$  af det hele Isfjelds Volum, det under Havet liggende  $\frac{3}{4}$ . Graah beretter i sin Reise, at «ifølge gjorte Forsøg er kun  $\frac{1}{4}$  eller  $\frac{1}{5}$  af Isen over Vandet», uden dog at angive den Methode, ad hvilken man er kommen til dette Resultat. Som det sees, stemmer Tallene godt med det ved den

<sup>1)</sup> Man maa ved Benyttelsen af denne Methode erindre, at man ingenlunde ved at bestemme den specifikke Vægt af Blandingen af Spiritus og Vand faar ligetil den specifikke Vægt af det Isstykke, der hverken flyder eller synker i Blandingen. Thi Isstykket, der ligger i Blandingen, smelter og omgives derved med Vand; man faar altsaa en Iskjerne omgivet af Vand, der synker i en Blanding af større specifik Vægt end Iskjerne alene vilde gjøre. Derimod kan Differencen mellem de specifikke Vægter af to Blandinger sættes omtrent lig Differencen mellem de specifikke Vægter af to Iskærner, der netop synker hver i sin Blanding.



angivne Methode fundne Resultat. Efterhaanden som Isfjeldene naar længere ud, kommer de i et saltre Hav; saaledes voxer den specifikke Vægt udenfor Jakobshavns Isfjord til omkring 1,0255, ved Indløbet til Diskobugten mellem Hunde-Eiland og Manetsak til 1,0262 og videre ud i Davisstrædet indtil 1,0265. Man vil imidlertid ved Beregning letteligen se, at den Forandring, som Isfjeldenes Beliggenhed undergaar ved at komme fra et Hav af specifik Vægt 1.0228 til et Hav af specifik Vægt 1.0265, ikke bliver stor, idet der i det første Hav vil af 1000 Dele ligge 134 Dele over Havet, i det sidste 137 Dele. Efter at være kommen paa det rene med, hvormeget af et Isfjeld der ligger over, og hvor meget der ligger under Havet, vil vi vende os til Jakobshavns Isfjord udenfor den faste Is og undersøge Isfjeldenes Høide. Bestiger man en af Fjordsiderne i den ydre Del af Jakobshavns Isfjord, saa vil man finde denne ydre Del af Fjorden fuld af Isfjelde af de forskjelligste Dimensioner lige fra Fjelde opimod 100 Meter ned til Smaastykker af Is, opfyldende Fjorden, saaledes at der over lange Strækninger neppe er synligt Vand i Fjorden. Efterhaanden som man stiger op, vil man iagttage, at der af høie Isfjelde er langt færre end af lave, saaledes at de findes i hundredevis med Høider under 30 til 40 Meter, og over denne Høide bliver der stadigt færre. Ved at bestige en Aas paa 83 Meters Høide ved Munden af Jakobshavns Isfjord fandtes det, at kun 3 Isfjelde naaede op til denne Høide; det høieste af disse maalttes gjentagne Gange, og som Middeltal af Maalingerne fandtes 122 Meter (386 Fod). Dette er det høieste Isfjeld, jeg nogensinde har iagttaget. Volumet af den over Vandet liggende Del af dette Isfjeld kan mindst anslaaes til 3 Millioner Kubikmeter og det hele Isfjeld til 21 Millioner Kubikmeter (omtrent 680 Millioner Kubikfod). Med Hensyn til det Dyb, som Isfjeldene naar, da kan dette ikke angives med Nøiagtighed, da Formen af den under Havet liggende Del af Isfjeldene ofte er meget uregelmæssig, saaledes som man kan overbevise sig om ved at reise hen til Foden af

et Isfjeld og se ned i Vandet. Man vil da ofte bemærke, at Isen har de mest uregelmæssige Former. Hvis Dybderne i Fjorden var nøiagtigt kjendte, saa kunde det med Sikkerhed lade sig sige, hvad den største tænkelige Dybde var for de Isfjelde, der kommer ud af Jakobshavns Isfjord; thi det er indlysende, at intet Fjeld slipper ud af Jakobshavns Isfjord, der har et større Dyb end Dybden i det Tversnit over Fjorden, hvor denne er grundest. Om Dybderne i Jakobshavns Isfjord er det mig kun bekjendt, at Grønlænderne behøver 9 Nøgler Bindegarn, hver Nøgle af 23 Favnes Længde, forat naa Bund paa det Sted i Fjorden, hvor de fisker Kaleraliker eller Kveiter. Dette giver et Dyb paa 207 Favne = 390 Meter. Længer ud ved Mundingen bliver Fjorden grundere, hvad der giver sig tilkjende derved, at de store Isfjelde her stopper op, indtil de afsmelter eller slaas saapas istykker, at de kan passere over det ringere Dyb.

Af de i det foregaaende anførte Tal vil vi forsøge paa at danne os en Forestilling om de Ismasser, som aarligen kan antages at udskydes gennem Jakobshavns og Tassukataks Isfjorde. Disse Ismasser repræsenterer det Kvantum Sne, som aarlig falder paa Nedslagsdistriktet for vedkommende Fjord, og som ikke formaar at smelte eller bortdunste. Vi vil altsaa tænke os den fra Fjorden fortsatte Dal fyldt med Bræ, og Bræen bevægende sig ned gennem Dalen. Da vi ikke kjender den Høide, i hvilken den under Bræen skjulte Dalbund ligger, kan vi ikke bestemme Mægtigheden af Bræen paa dette Sted. Ismasserne, som skrider frem, naar omsider ud i Fjorden, og denne tiltager i Dybde. Med den tiltagende Dybde bliver det Tryk, som Isbræen udøver paa den underliggende Fjordbund, mindre, idet nemlig en Del af Isbræernes Tryk modvirkes ved Vandets Opdrift. Tænker man sig saaledes en Bræ paa 210 Meters Mægtighed bevægende sig ud gennem en Fjord, og at Fjorden naar et Dyb til Exempel af 60 Meter, saa vil Ismassen hvile paa Bunden kun med et Tryk af 140 Meter; thi en Isbræ med 70

Meters Mægtighed vil netop berøre Bunden uden at trykke paa samme, naar Fjorden er 60 Meter dyb. Tænkes den samme 210 Meter mægtige Isbræ at bevæge sig længere ud i Fjorden, og at Fjordens Dyb fremdeles tiltager, saa er det indlysende, at tilsidst vil den hele Isbræ intet Tryk udøve paa Bunden, nemlig i det Øieblik, at Fjorden naar et Dyb af 180 Meter; og naar Fjorden et større Dyb end 180 Meter, saa vil Bræen, skjønt endnu sammenhængende, flyde nogenlunde i Lighed med et Isfjeld, indtil Kanten af Isbræen sønderbrydes ved Vandets Opdrift, og Isfjeldene dannes, saaledes som beskrevet tidligere. Forat Isfjeldene skal dannes, er det nødvendigt, at Bræen ikke hviler med Tryk paa Bunden; trykker Isbræen Bunden, saa er Opdriften utilstrækkelig til at sønderbryde Iskanten.

Herved er der givet os et Middel ihænde til nogenlunde at danne os en Forestilling om Mægtigheden af de Bræer, der udfylder Fjordene, naar man først har bestemt Høiden af den Kant, hvormed Isbræen ender; thi der maa da være omtrent det samme Forhold mellem Volumenerne af Bræen under Vandet og over Vandet, som Tilfældet er ved Isfjeldene, og den Del af Bræen, der flyder, har en paralelpipedalsk Form. Bræen i Fjorden, hvor den ikke naar Bunden, men flyder, svømmer ikke frit, men danner endnu en kontinuerligt sammenhængende Masse med de ovenfor liggende Dele, der hviler paa Bunden; imidlertid indsees det, at der, naar Kalvningen skal finde Sted, maa ligge mindst  $\frac{1}{2}$  Dele af Bræen under Vandet; thi laa der mindre end  $\frac{1}{2}$  Dele af Volumet under Vandet, saa vilde Opdriften ikke være tilstrækkelig til at sønderbryde Bræens Kant. Den samlede Mægtighed af en Isbræ, hvor den kalver, kan altsaa sættes lig det syvdobbelte af Gjennemsnits-høiden af Isbræens Kant over Havet. Som tidligere omtalt ender Jakobshavns Isfjord med en Iskant paa omtrent 40 Meters Høide over Havet, hvoraf skulde følge, at Bræen havde en Mægtighed af 280 Meter (861 Fod). Fjordens Bredde er omtrent 4500 Meter. Kjendtes nu den midlere Hastighed

for den hele Bræ i Løbet af hele Aaret, saa kunde man bestemme det Kvantum Is, som aarligen kalvede ved Jakobshavns Isfjord. For at kunne angive med nogenlunde Sikkerhed et saadant Tal, maatte der ogsaa være anstillet Iagttagelser over Bræernes Hastighed om Vinteren samt om Vaaren og Høsten, ligesom over Hastigheden af Bræen i større Dyb. Som bekjendt antages det, at Bræerne, der ligger paa Land, bevæger sig med mindre Hastighed nærmere Bunden end i Overfladen, hvilket formodes at have sin Grund i Bræens Friktion mod Underfladen. Da Bræen i Jakobshavns Isfjord imidlertid ikke hviler paa Bunden, saa turde Hastigheden i et større Dyb maaske ikke være saa meget mindre end Hastigheden i Overfladen, og vi kan da benytte de tidligere anførte Maalinger til at bestemme det Kvantum Is, som paa en Sommerdag kan antages at passere igjennem Jakobshavns Isfjord. Tages Middeltal af den midlere Hastighed af de sex maalte Punkter i Jakobshavns Isfjord, og føjes hertil som en syvende Maaling et Punkt med ingen Hastighed for Siden af Bræen mod Land, hvor Bevægelsen er saa godt som ingen, saa faaes 14.25 Meter som midlere Hastighed paa en Sommerdag for Isbræen i Jakobshavns Isfjord. Vi søger dernæst Tværsnittet af den 4500 Meter brede og 280 Meter mægtige Bræ, idet dette Tværsnit har Formen af et Trapez, derved at Fjordsiderne skraaner med en Vinkel paa omkring 20 Grader. Man vil da finde, at Bræens Tværsnit udgjør noget over 1 Million Kvadratmeter, og at der daglig kan antages at passere gjennem dette Tværsnit 16 Millioner Kubikmeter Is.

Om man paa samme Maade beregner Mægtighed, Tværsnit og midlere Hastighed hos Torsukatak Isbræ, saa vil man kunne danne sig en Forestilling om de Ismasser, som her udføres. Torsukatak ender med en Kant paa omtrent 15 Meter, hvorefter Bræen skulde have en Mægtighed af 105 Meter. Dens Bredde er 9000 Meter, og dens midlere Hastighed kan, naar der tages Hensyn til, at Kanterne mod Land saa godt som slet

ikke bevæger sig, sættes til 6,83 Meter daglig. Man vil da finde, at Tværsnittet i Torsukatak udgjør ikke fuldt 1 Million Kubikmeter, og at den daglige Produktion af Is udgjør omtrent  $6\frac{1}{10}$  Millioner Kubikmeter Is.

Om man sammenligner de her fundne Ismængder med Dimensionerne af Isbjergene, som ovenfor angivet, saa vil erindres, at et Isfjeld paa 21 Millioner Kubikmeter er et meget stort Isfjeld; de 16 Millioner Kubikmeter Is, som Jakobshavns Isfjord producerer, vilde altsaa udgjøre, hvad man kunde kalde et stort Isfjeld, og de Mængder, som Torsukatak udsender, vilde udgjøre et middelstort Isfjeld. Man kan samle Resultaterne af Beregningen derhen, at Jakobshavns Isfjord daglig producerer saa meget Is i Form af Isfjelde og Kalvis, at den, om den tænkes samlet, vilde være et Isbjerg 252 Meter dybt, langt og bredt, og hæve sig 36 Meter over Havet, medens Isen fra Torsukatak vilde danne et Isfjeld 185 Meter dybt, langt og bredt og hæve sig 26 Meter over Havet.

Den, der har havt Anledning til om Sommeren at se store Isfjelde i stort Antal passere ud gennem Mundingen paa Jakobshavns Isfjord eller ud gennem Vaigatet, vil maaske forbauses over, at Produktionen af Is i en Isfjord som Jakobshavns skulde indskrænke sig til et eneste Isfjeld af Dagen af Dimensioner, der ikke er større end dem, der ofte iagttages ved Mundingen af Fjordene. Herved maa det erindres, at der om Sommeren dagligt udskydes større Mængder af Isfjelde og Kalvis end dem, der daglig produceres, idet alle de i Løbet af den lange grønlandske Vinter producerede Isfjelde skal føres ud i de Maaneder af Aaret, da Fjorden er aaben.

Udenvidere at udstrække de her fundne Tal for den pr. Sommerdag producerede Ismængde til hele Aaret, vilde sandsynligvis give et for stort Tal, da det kan forudsættes, at Bræerne bevæger sig langsommere om Vinteren end om Sommeren. Kunde man antage, at den daglige Produktion var ens Sommer og Vinter, saa vilde efter de ovenfor anførte Tal, den

aarlige Ismængde, der kalver i Jakobselvns Isfjord, udgjøre omtrent 5800 Millioner Kubikmeter Is, og i Torsukatak 2300 Millioner Kubikmeter. At den formodede mindre Hastighed hos Bræen i Vintermaanederne skulde være saa meget mindre, at den producerede Ismængde blev reduceret til Halvdelen af de ovenfor anførte Tal, er lidet rimeligt,<sup>1)</sup> og det kan saaledes antages, at den Mængde Is, der som Kalvis og Isfjelde udskydes af Jakobshavns Isfjord ligger mellem 2900 og 5800 Millioner Kubikmeter og ved Torsukatak mellem 1150 og 2300 Millioner Kubikmeter.

Forsøger man paa lignende Vis at danne sig en Forestilling om de Mængder Is, som udsendes af de mindre Isfjorde, som til Exempel Alangordlek, saa vil man finde, at Produktionen fra denne neppe kan antages at naa op til  $\frac{1}{100}$  af Jakobshavns Isfjords Produktion.

Endskjønt de Ismasser, som Isfjordene aarligt udfører, er som vi har seet, saare betydelige, saa udgjør de dog ganske sikkert kun en Brøkdel af den Nedbør, som falder paa Indlandsisen; den største Del af Nedbøren bortledes som Elve, der søger ind under Isbræerne og ud i Fjordene under disse. Dr. Rink er ved Betragtningen af den Mængde Kalvis og Isfjelde, som en Fjord udskyder, kommet til det Resultat, at Isfjordene aarligt udskyde «een eller flere tusinde Millioner Kubikalen Is».<sup>2)</sup> Ved at sammenligne dette Tal med det antagne Areal af Grønland, hvorfra Isfjordene næres, og med Nedbøren, paavises det,

<sup>1)</sup> Forringelsen af den ovenanførte Produktion til det halve forudsætter nemlig, at Bræen i de 3 Høstmaaneder og de 3 Vaarmaaneder gaar med kun Halvdelen af Sommerens Hastighed, og at Bræen om Vinteren staar stille. Forbes fandt ved Bois Bræen, at to Punkter, der i Sommermaanederne (April—Oktober) bevægede sig med en midlere Hastighed af 37.7 og 9.9 Tommer om Dagen, i Vintermaanederne (Oktober—April) gik med respektive 19.1 og 4.7 Tommer daglig. Maximumshastighed i Juli 52.1 Tomme, Minimumshastighed i December 11.5 Tommer hos det første Punkt.

<sup>2)</sup> Om Vandets Afløb fra det Indre af Grønland ved Kilder under Isen. Naturhistorisk Tidsskrift 3. R. I B. Side 4.

at den producerede Ismængde er mange Gange mindre end den, som søger bort som Elve. Selv om man, saaledes som jeg efter den ovenfor anførte Beregning er tilbøielig til at gjøre, sætter en eller flere tusinde Millioner Kubikmeter istedetfor det samme Antal Kubikalen, saa vil dog fremdeles de producerede Ismængder forblive en Brøkdel af den Nedbør, der som Vand løber ud under Grønlands Bræer.

Under de store Bræer maa disse Elve om Sommeren være særdeles betydelige; hvor Bræen strækker sig maaske mange Mil ud i Fjorden, der finder Elvens Udløb Sted langt ovenfor Bræens Ende, og kan følgelig ikke iagttages uden ved at undertøge Saltmængden i Fjorden. Foran Torsukatak Isbræ kunde dog tydeligen opdages, at en leret Elv løb under Kanten af Bræen, og denne Strækning har da den lerede Farve, der er karakteristisk for Bræbække.

Med Hensyn til Saltmængden i de grønlandske Isfjorde, da er der tidligere anført et Par Iagttagelser fra Jakobshavns Isfjord, hvoraf det fremgaar, at Vandet her er blandet med omtrent 14 Procent ferskt Vand ved Tassiusaks Udløb i Fjorden, og at Tassiusak er blandet med 24 Procent ferskt Vand, naar Klormængden i Davisstrædet udenfor sættes til 1,856 pCt. Klor.<sup>1)</sup> I Diskobugten ligeud for Jakobshavns Isfjord er Saltmængden i Havet betydelig, dog variabel. 9 Prøver toges paa Strækningen mellem Jakobshavn og Klaushavn den 13de Juli 1873, og der fandtes Klormængder, der varierede fra 1.744 pCt. og op til 1,823 pCt. I Diskobugten fandtes den 15de Juni 2 Mil øst for Hunde-Eiland en Gehalt af 1,843 pCt. og mellem Hunde-Eiland og Manetsok som anført 1,856 pCt. Klor. Udenfor Isfjorden er saaledes Fortyndingen mærkelig, dog ikke betydelig. Udenfor Kolonien Umanak fandtes den 4de August Klormængden 1,684 pCt., men 2½ Mil udenfor Nûgssuak 1,805 pCt.

<sup>1)</sup> Hvilket er den Gehalt af Klor, som fandtes mellem Hunde Eiland og Manetsok ved Indløbet til Diskobugten.

Selve Vandet i de store Fjorde, hvor Isfjeldene svømmer, er ikke leret; hvor derimod i Grønland Bræerne ikke naar ud i Havet, der er Vandet udenfor Bækkenes Udløb farvet af den Slam, som Elvene fører med sig, ligesom de Elve, der ofte kan iagttages langs Siderne i de store Isfjorde, fører Mængder af opslæmmet Materiale. De mægtige Elve, der maa formodes at strømme under Bræerne i Fjordene, udtømmer sandsynlig sit Slam i Fjordene under Bræerne, hvor det da efterhaanden kommer til Afsætning.

De nedenfor staaende Tal viser de Grændser, indenfor hvilke Slammængden i Bræelvene varierer. Tallene angiver, hvormange Vægtsdele Slam der findes i 1,000,000 Vægtsdele Vand, hvad der omtrent falder sammen med Vægten af Gram opslømmet Materiale i 1 Kubikmeter Vand:

	Gram pr. Kubikmeter.
Alangordlek 10de Juli . . . . .	2374.
Tuaparsuit i Umanak 6te August . . . . .	678.
Assakak i Umanak 21de August . . . . .	208.
Umiatorfik i Umanak 20de August . . . . .	75.
Pakitsok 17de Juli . . . . .	723.
Kangerdlugssuak 11te August . . . . .	278.
Jakobshavn 9de Juli . . . . .	104.

Det fremgaar af disse Tal, at Mængden af Slam varierer inden vide Grændser.

Om de glaciale Dannelser i Nordgrønland. Det ligger nær at undersøge, om man i de Dele af Nordgrønland, der fortiden ikke er dækkede af Is, finder Spor til, at Indlandsisen og Isbræerne har haft en større Udbredelse. Den, der er vant til at beskæftige sig med de herhenhørende Fænomener, som Frikionsstriber, erratiske Blokke, Møræner og moutonne-rede Former, og til i dem at se Mærker efter de glaciale Tilstande, vil snart opdage, at Ismasserne i Fortiden har haft en større Udbredelse i Nordgrønland. De nævnte glaciale Dan-



nelser, man støder paa i Nordgrønland, er saa fuldstændigt analoge med dem, der er vel kjendte fra Norge, at det turde være overflødigt at beskrive samme.

Om man sammenligner Forholdene i den Del af Nordgrønland, der ikke er dækket af Is, med Forholdene i Norge, saa vil man finde, at følgende glaciale Fænomener optræder vel udviklet i begge Lande:

1. Erratiske Blokke er almindeligt udbredte saavel i høiere som i lavere Niveauer.
2. Friktionsstriber og Politur paa Fjeldene optræder analogt i begge Lande.
3. Moutonnerede Overflader sees saa godt som overalt paa Gneisen langs Fjordsiderne og paa Øerne.
4. Moræner finder man paa Steder, hvortil Isbræerne nu ikke længer naar frem.
5. Man finder i Grønland som i Norge, at Havbanker hæver sig udenfor dybe Fjorde, hvilke Banker maaske er Repræsentanter for Moræner for tidligere mægtige Bræer.
6. Nær de nuværende Bræer finder man fyldte eller tomme «Botner», ligesom der i Grønland optræder Sækkedale med Indsøer i, spærrede af Moræner.
7. Endelig finder man Landet gjennemsat af mange og dybe Fjorde, ligesom det er bedækket med talrige Indsøer.

Udbredelsen af de erratiske Blokke, Friktionsstriberne og de moutonnerede Former tillader at drage Slutninger med Hensyn til Udbredelsen af Ismasserne i Grønland i ældre Tid, og en Del Exempler paa Forekomsten af disse turde derfor ikke være uden Interesse. Om man betragter Overfladen af Fjeldet nær Mundingen af Jakobshavns Isfjord, saa vil man her ikke have vanskeligt for at opdage dybe Friktionsstriber i Form af rendeformige Fordybninger mellem de moutonnerede Former, hvilket viser, at Isen engang maa have udbredt sig til Mundingen af Fjorden og længer. Ogsaa fremmede Blokke af

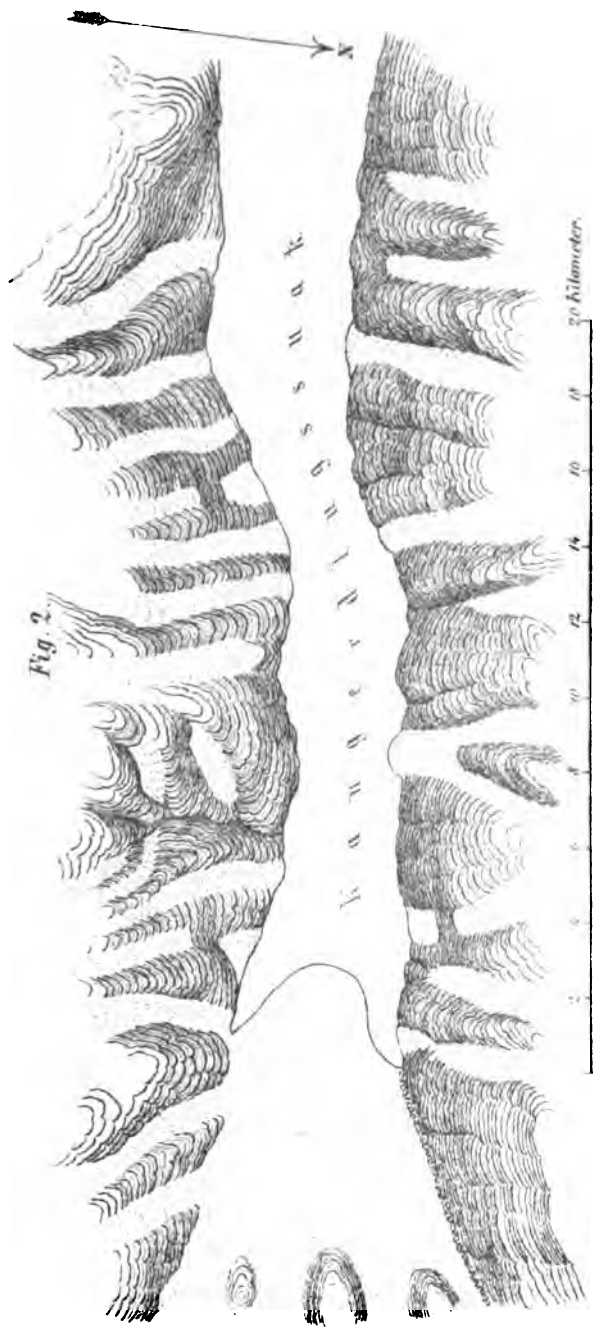
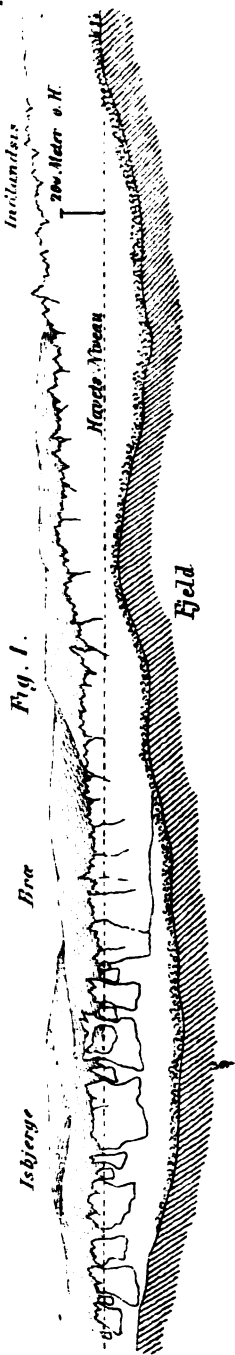
Granit liggende paa Overfladen af det af finkornet Granit bestaaende Fjeld forekommer her.<sup>1)</sup>

Som tidligere omtalt, ligger den Ø, hvorpaa Kolonien Umanak er anlagt, midt ude i Umanaksfjorden og hæver sig her til en Høide af 1163 Meter (3707 Fod); de øverste Dele af den lille Øen er det visseligen umuligt at bestige. Paa den Del af Øen, hvor Kolonien ligger, og som vender ind mod Fjorden, vil man overalt opdage moutonnerede Former paa det af Gneis bestaaende Fjeld; Friktionsstriber er ikke sjeldne, og af erratiske Blokke af Bergarter tilhørende Grundfjeldet, men forskellige fra Stedets, findes der særdeles mange. Dette viser, at den store Umanaksfjord engang har været fyldt med en sammenhængende Isbræ, der har sribet og poleret Umanaksøen, hvis høieste Dele maaske har paa en Tid raget ud af Bræen som et «Nunatak».

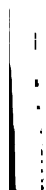
Udenfor Umanaksfjorden ligger Ubekjendte Eiland, og udenfor Vaigatet ligger en Ø, Haresøen. Disse to Øer har jeg ikke besøgt, men Iagttagelser fra tidligere Forskere viser, at disse Øers geologiske Bygning, i Forbindelse med de paa Øerne forekommende erratiske Blokke, har stor Betydning for Kjendskaben til Ismassernes Udbredelse i ældre Tid. Giesecke beretter, at han paa Ubekjendte Eiland, der bestaar af Bergarter tilhørende Nordgrønlands Basaltformation, har fundet Rullestene af Urformationen, hvilken han dog ikke kunde finde fastsiddende.<sup>2)</sup> Om Forekomsten af fremmede Blokke paa Haresøen og af Friktions-

<sup>1)</sup> Paa Veien mellem nordre Huse og Munden af Isfjorden findes i omtrent 50 Meters Høide to Jættegryder, 3 Skridt fra hinanden, den ene 0.5 Meter i Diameter, fyldt med Sten, den anden med en ikke ganske cirkelformet Aabning var 0.4 Meter og 0.5 Meter i Diameter. Dybden kan ikke angives, da Jættegryderne var fyldte med Sten og Jord. Lavere ned ved en liden Elv findes ogsaa en mindre Jættegryde. 0.25 Meter bred, 0.5 Meter lang og 0.4 Meter dyb.

<sup>2)</sup> Gieseckes mangeaarige Iagttagelser fra Grønland er ikke offentliggjorte. Hans Dagbog fra Reiserne opbevares paa Universitetsbibliotheket i Kjøbenhavn.









striber i Omegnen af Diskøen beretter Hr. K. I. V. Steenstrup følgende:<sup>1)</sup>

«Overalt langs Kysterne og paa Øerne, ligesom paa de høieste Fjeldtoppe, sees tydelige Mærker af en tidligere Isbedækning. Saaledes vise Skurestriberne paa Halvøen ved Unartok og paa Øen Satok (Saitok) i Diskofjorden, at denne engang har været en Isfjord, ja de skurede «Hæller», der gaa fra NO. SV. paa Immeriksok, en af Hvalfiskeøerne, tyde endog paa, at hele Diskobugten engang har været fyldt med Is. At Vaigattet ligeledes har været en Isfjord gjøres sandsynligt ved Skurestriberne paa de høiere Punkter paa Arveprindsens Eiland og Øen udenfor Sarkak, i Forbindelse med de store Gneisblokke, (hvoraf flere ere isskurede), der findes langs Kysterne, lige til Toppen af Fjeldene, og i uhyre Masser ere ophobede paa Hareøen«. Hareøen er efter Steenstrup circa 1800 Fod høj og bestaar af Basalt med en underliggende kulførende Formation. Indenfor i Bunden af Vaigattet ved Arveprindsens Eiland og i Torsukatak findes Land, der bestaar af Gneisbergarter. Ligeledes findes Gneisbergarter indenfor Ubekjendte Eiland i Umanaksfjordens indre Dele. Forekomsten af de fremmede Blokke paa disse Basaltøer synes altsaa at antyde, at Isen har strakt sig til de yderste Øer i Grønland og maaske længer. I Overensstemmelse hermed er det, at moutonnerede Former findes paa Øerne i Egedesminde's Distrikt, og Iagttagelserne synes altsaa at føre didhen, at de 3 store Havbugter i Nordgrønland Diskobugten, Vaigattet og Umanaksfjorden engang har udgjort store isfyldte Fjorde.

Ogsaa Moræner kan iagttages paa Steder, hvorhen Isbræerne fortiden ikke naar. Ved Indløbet til Ilartdleik ved Pakitsok ligger saaledes en Moræne, der naar op til en Høide af omtrent 25 Meter. Den indenfor liggende Fjord Ilartdleik ligner en

<sup>1)</sup> Om de kulførende Dannelser paa Øen Disko o. s. v. Vidensk. Med. fra den naturhist. Forening i Kjøbenhavn 1874. Side 90.

Indsø, idet den kun har Afløb gennem de to trange Strømsteder, som Vandet har skaaret gennem Morænen.

Førend vi gaar over til at betragte de storartede Arbejder, som Bræernes Erosion har udført i Grønland, bør en vis Art postglaciale Dannelser omtales paa Grund af deres Identitet med lignende Dannelser i Europa. Ved Udløbet af Elvene støder man undertiden i Grønland paa Terrasser af lignende Form, som dem, man finder ved Udløbet af Elvene i Norge. Men medens disse Terrasser i Norge naar en Høide af indtil 200 Meter, synes de i Grønland kun at naa en Høide af 30 Meter. Kun en af disse Terrasser nemlig den ved Lerbugten og Sandbugten nær Klaushavn har jeg nærmere undersøgt. Den bestaar af Ler og Sand. Lerlagene fører glaciale Forsteninger<sup>1)</sup> og desuden findes paa et Sted i Terrassen i en Høide af omtrent 25 Meter og i nogen Afstand fra Havet et stort Antal Nøkkestene af de forskjelligste Former. Enkelte af disse har dannet sig omkring Skaller af de glaciale Forsteninger; mange af de mer kugleformede og indeholder undertiden Spor af det Skjæl, omkring hvilket den kalkblandede Ler, der danner Stenen, har afsat sig. I mange kan nu ingen Levninger af de Organismer, der har givet Anledning til Nøkkestenenes Dannelse, paavises. Nogle af Stenene minder om Formen efter de i det Indre liggende Organismer. En Sten, der synes at være dannet om en med Bryozoer besat Tarestilk havde en langstrakt Form som denne. Men som oftest kan man af Stenens ydre Form ikke gjætte sig til Formen af det indesluttede Dyr.

Terrassen Klaushavn i Ler- og Sandbugten viser, at denne Del af Landet engang har ligget lavere, og da saa meget lavere som Overfladen af Terrassen nu ligger høiere end Havet. Thi

<sup>1)</sup> De indsamlede fossile Skaller er af Prof. G. O. Sars bestemte saaledes: *Cardium grønlandicum*, *Cardium islandicum*, *Mya truncata*, *Mya arenaria*, *Mytilus edulis*, *Tellina calcaria*, *Saxicava rugosa*, *Yoldia arctica*, *Buccinum grønlandicum*, *Balanus porcatus*. Nordenakjöld, der angiver omtrent de samme Arter fra det samme Findested, bemærker, at alle Arterne lever nu i Ishavet.



de marine Forsteninger viser, at Terrassen er afsat under Havet, og den horizontale Overflade antyder den gamle Havstand. Grønland maa følgelig i en Tid, der er senere end den Tid, hvori Isbræerne havde sin største Udbredelse, have steget høiere op af Havet.<sup>1)</sup>

Ogsaa i en anden Henseende er Terrasserne i Nordgrønland af Betydning for Spørgsmaalet om Terrassedannelse. Under en høiere Havstand vilde overalt i Fjordene, hvor en Elv førte løse Materialier til Havet, disse Materialier efterhaanden op-hobes til Niveau med Havstanden, saaledes at vi skulde vente i hver Fjordbund at finde Terrasser svarende til den gamle Havstand. Søger man imidlertid ind i Fjordene for at finde disse Terrasser, da støder man som bekjendt paa Isbræerne, der udfylder Fjorden og hindrer Terrassedannelsen. Hvor imidlertid Isbræerne ikke gaar helt ud i Fjorden, men kun ned imod Fjordbunden, der gaar den moderne Terrassedannelse for sig. Inderst i Ilartdlek, hvor en Bræ skyder ned mod Fjorden, der er denne paa en længere Strækning opfyldt af Sand og Slam, som ligger bart ved Lavvande, hvilken Sand- og Slamalette strækker sig bortover imod en af Bræens ældre Moræner. Stod Vandet her i Ilartdlek lavere, eller laa Landet høiere, saa vilde her fremkomme en Terrasse. Steg til Exempel Landet 20 Meter, saa vilde her dannes en Terrasse paa 20 Meter, den omtalte Terrasse nær Klaushavn vilde da faa en Høide paa 50 Meter; men inde i Jakobshavns Isfjord vilde der ingen Terrasse være, da Isbræen hindrer dette. Det fremgaar af de her beskrevne Forhold, at Terrasser i nærliggende Dale kan have meget forskellige Høider, uden at man derfor behøver at antage forskellige Hævninger af Landet i disse nærliggende Dale eller

---

<sup>1)</sup> Som bekjendt er det bevist, at visse Dele af Sydgrønland synker. Mange Beviser for, at ogsaa Nordgrønland synker, har Grønlænderne anført for mig, hvilke Beviser det dog ikke er Stedet her at anføre. Foran for den nuværende Synkning har der, efter hvad der ovenfor er anført, gaaet en Stigning af Landet.

**Fjorde.** Forholdet finder sin naturlige Forklaring ved Hjælp af Isbræerne, der trækker sig tidligere tilbage fra en Dal end fra en anden. Naar vi saaledes i Norge finder, at i Fjorddalene paa Vestsiden af Norge de høieste Terrasser ligger i 100 Meters Høide, medens de paa Østlandet findes i Høider paa 200 Meter, da ligger rimeligvis Grunden til dette Forhold deri, at Bræerne strakte sig ud i de vestlandske Fjorde og hindrede Terrassedannelsen her, dengang Norge laa 200 Meter lavere. Først da Landet var steget saa høit, at det kun laa 100 Meter lavere end nu, havde Bræerne trukket sig saa langt tilbage fra Fjordene, at Terrasserne kunde begynde at dannes.<sup>1)</sup>

Det staar tilbage at undersøge, om de Fjorde, Indsøer og Dale, hvoraf Grønland er gjennemsat, eksisterede, før Landet blev bedækket med Is; om Ismassen, da den lagde sig over Landet, allerede fandt disse dybe Render færdige til at optage de overskydende Ismasser, saaledes at Landets Konfiguration allerede paa Forhaand frembød bekvemme og naturlige Afløb for Bræerne, eller om det ikke snarere forholder sig saa, at ligesom Elvene selv danner sine Elveleier og ikke finder dem færdige for sig, saaledes har Bræerne selv maattet erodere de Leier, hvorigjennem de søgte og søger Afløb, eller Fjordene.

Forfatteren af denne Afhandling, der i et Par Aar har været beskjæftiget med Fjorddannelserne paa Norges Vestkyst, og hvis Reise til Grønland nærmest var foranlediget ved Ønsket om at lære de virksomme grønlandske Isfjorde at kjende, har gjentagne Gange havt Anledning til at omtale Dannelsen af Fjorde, Indsøer og Havbanker i Norge.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Paa dette Forhold har jeg gjort opmærksom tidligere i en Afhandling betitlet „Om Peliggenheden af Morsøener og Terrasser foran mange Indsøer“. Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1875. Side 62. Dog kunde jeg dog dengang ikke pege paa et saa oplysende Forhold som Terrassen nær Klausshavn og den nærliggende Jakobshavns Isfjord, der hindrer Terrassers Dannelse her.

<sup>2)</sup> Die glaciale Bildung der Fjorde und Alpanseen in Norwegen. Poggendorffs Annalen 1872.

Om Botner og Sækkedale samt deres Betydning for Theorier om

Med Henviſning til diſſe Arbeider kan vi her indskrænke os til at paaviſe, at hvad der er ſagt om Fjorddannelſerne i Norge gjælder ogsaa om de grønlandske Fjorde og Søer.

Den Del af Grønland, ſom er fri for Is, finder vi bedækket med et ſtort Antal af ſtore og ſmaa Indſøer. Den Regel, ſom er paaviſt af Ramsay, at man overalt i de Egne af Europa og Nordamerika, der bærer Mærker efter gamle Bræer, finder Indſøer i overordentligt ſtort Antal, ſees altsaa ogsaa i Grønland at finde ſin Bekræftelſe. Og ligesom man i Europa og Nordamerika i de ſamme forhen af Bræer dækkede Egne finder Landene gjennemsatte af lange og dybe Fjorde, ſom ophører der, hvor de gamle glaciæle Mærker ophører, ſaaledes finder vi i det nuværende og forhen isdækte Grønland de ſamme eiendommelige dybe Indſkjæringer af Havet.

Fjordene i Grønland er, ligesaa lidt ſom i andre Lande, indskrænkede til enkelte Bergarter. I de indre Dele af Diskobugten og Umanakſfjorden findes Fjordene omgivne af Urformationens Bergarter, men de ydre Dele af Umanakſfjorden omgives af baſaltiske Dannelſer, og Vaigatet, der danner Fortſættelſen af Torsukatak Iſfjord, er omgivet af Kridtformationens og den miocæne Tids Dannelſer, ſamt af Baſalt. Der gives vel neppe nogen Geolog, der har havt Anledning til at bereiſe Vaigatet, ſom betvivler, at de paa begge Sider af denne mægtige Fjord optrædende Dannelſer fra Kridttiden og de endnu yngre baſaltiske Dannelſer engang har udgjort et ſammenhængende Hele. Men de Kræfter, der har bortført al den Sten, der har fyldt Vaigatet fra Diskø og over til Nûgssuak, maa have virket ſenere end den miocæne Tid, thi ved Atanikerdluk findes i ſelve Fjordsiden de bekjendte miocæne Forſteninger, og Fjorden

---

Dalenes Dannelſe. Geologiska Föreningens i Stockholm Förhandlingar. 1875. Band II. No. 9.

Om Beliggenheden af Mørſener og Terræſſer foran mange Indſøer. Öfverſigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1875

Om Dannelſen af Fjordene, Fjorddalene, Indſøerne og Havbankerne. Öfverſigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1875.

kan ikke være ældre end de Bergarter, der danner dens Sider. Basaltdannelsen er sandsynligvis tildels endnu yngre end den miocæne Tid. Vi føres altsaa til den Slutning, at Fjorddannelserne i Grønland er yngre end den miocæne Tid, og da mægtige Basaltudbrud ligger imellem den miocæne Tid og Fjordenes Dannelser, saa bliver af denne Grund Fjorddannelsen meget ung.

Den vidstrakte Indlandsis paa Grønland maa søge sit Afløb gennem et stort Antal af Bræer og over hele Kysten. I Overensstemmelse hermed findes langs den grønlandske Kyst ligesom langs den norske Kyst Fjordene i stort Antal, den ene ved Siden af den anden. Om man vender sig til de smaa Bræer i Nordgrønland, der ikke næres af en vidstrakt Indlandsis i Højderne, da finder man omkring dem Fordybninger i Klippegrunden af samme Form som de Dannelser, der i Norge benævnes Botner. (Cirques, Cul de sacs). Botnerne i Norge er tidligere beskrevne i den omtalte Afhandling betitlet «Om Botner og Sækkedale». Det omtales her, at Botnerne findes i de Dele af Norge, hvor Bræerne fortiden holder til, videre at de findes i Alperne, i Himalaya-Bjergene, paa Spitzbergen, altsaa overhovedet i Lande, hvor Bræer nu findes. Til disse Lande kan altsaa nu ogsaa føies Grønland. Omkring Diskobugten, hvor Landet er lavt, og hvor derfor heller ikke de isolerede Brædannelser er synderlig udviklede, har jeg intetsteds iagttaget disse Botner. Men langs Sydvestsiden af Vaigatet og paa Nordsiden af Nûgssuaks Halvø, hvor Fjeldene hæver sig op imod og over Snegrændsen, der er Botnerne vel udviklede og mange i Antal. De findes her baade i Bergarter, der tilhører Urformationen og i de basaltiske Dannelser. Om Botnernes Udbredelse i Norge er det paavist, at de fortrinsvis holder til paa den mod Nord vendte Side af Fjeldene, hvilket synes at have sin Grund deri, at denne Side fortrinsvis er skikket til at huse Isbræerne, da den er mindst udsat for Paavirkning af Solen. Om Botner ogsaa i Grønland for-

trinsvis findes paa Nordsiden af Fjeldene er vanskeligt at afgjøre, da Landet er saa lidet undersøgt. Betragter man imidlertid Konfigurationen af Landet paa Sydsiden af Umanaksfjorden, altsaa paa den Side af Fjorden, der vender fra Solen, saa vil man fra Fjeldet **Kelertinguak** og langs Fjorden mod NO opdage en hel Række af Botner, hvilke Dannelser man, saavidt iagttaget, ikke finder paa Fjordens Nordside. I det 1857 Meter høie Fjeld **Kelertinguak**, der dannes af Basalt, findes to store mod Nord vendte Botner, der let kan iagttages i stor Afstand fra Fjeldet ude fra Umanaksfjorden. Overhovedet synes i Grønland som i Norge de øverste Tinder hyppigt kun at udgjøre Dele af Krandsen omkring Botnerne. Mange Botner fyldte med Bræer findes ogsaa i Kangerdlugssuak og i Sundet mellem Upniviks Ø og Fastlandet. En af disse ved et Sted benævnt **Inukavsaik** er særdeles imponant. Den øverste Tind op for Botnen har en Høide af 1207 Meter (3847 Fod) og styrter sig fra denne Høide steilt ned paa Bræens Overflade i Botnen, og da denne ligger i en Høide af 240 Meter (765 Fod) over Havet, saa er Styrtningen her fra den øverste Tind til Bræen i Botnen omtrent 1000 Meter. Bræen udfylder Botnen ganske og flyder endogsaa ud over samme, idet den fortsætter ned mod Havet med en Morsene paa et Par hundrede Fods Høide.

Botndannelsen synes i det Hele overalt i Verden at være en Ledsager af de smaa Bræer, ligesom Fjordene ledsager Istidens store Bræer.

En Dannelse af samme Art som Botndannelsen er utvivlsomt Sækkedalene eller de Dale, der pludselig standser med en brat, cylinderformet Fjeldvæg. Deslige Dale findes ogsaa i Grønland. Den Dal, gennem hvilken man fra **Kekertak** reiser overland ind til Torsukatak, er en saadan Sækkedal. Som tidligere omtalt kan man fra **Kekertak** søge ind til Bunden af den Sidefjord, hvor **Kekertak** ligger og herfra gaa overland til **Tasersuak**. Paa Veien hid passerer man gennem en Sækkedal, og i dennes Bund finder man en liden Sø **Amalortuarak** (den

lille runde), foran hvilken der ligger en Moræne, altsaa Forhold, der er fuldstændigt analoge med Sækkedalene i Norge, i hvilke der hyppigt ligger øverst i Dalen en liden Indsø spærret af en Moræne.

Om man forsøger at gjøre sig fortrolig med de Erosionsarbejder, der fortiden foregaar i de grønlandske Fjorde og Fjorddale, saa vil man snart se, at disse er af en dobbelt Art, en udhulende og en udfyldende. Foreløbigt vil vi for ikke at gjøre Fænomenet for compliceret, tænke os en Fjorddal, hvor Bræen ikke gaar helt ud i Havet, men kun ned imod samme Ror man til Exempel ind imod Bræen ved Hartzleik, saa vil man allerede i stor Afstand fra Bræen støde paa saa grundt Vand, at man end ikke med en fladbundet Konebaad kan ro ind til Enden af Fjorden, men ved Lavvande kan man paa det løse Slam og Sand, hvormed Elven fra Bræen har opfyldt Fjorden, gaa helt ind til Bræen, hvorfra man da ser en leret Elv strømme ud, stadigt videre fyldende Fjorden ud.

Foran Bræen ligger der først en mindre ældre og senere en større moderne Moræne. De Masser af Sten, Slam og Sand, som Bræen saaledes fører ud dels gennem Elven dels under sig som Stene, tages fra Underlaget; thi hvad der falder ned fra Fjeldsiderne paa Bræen, kan særskilt forfølges for sig, og er uafhængigt af, hvad der kommer frem under Bræen og i Bræelvene. Dette Skuringsmateriale kan tænkes tilveiebragt af Bræen paa forskjellige Maader. I de yngre Dannelser i Nordgrønland, hvor Bergarterne bestaar delvis af løs Sand og meget bløde Skifere, er Bræens Arbeide let, og i visse ganske bløde Sandlag kunde Bræen rimeligvis uden Hjælp af Skuringsmateriale føre større Masser løst Berg med sig. Uhyre Moræner ligger ogsaa omkring de Bræer, der eroderer i disse Bergarter, idet Frost, Dagvand og Elve ikke formaar at ødelægge og føre afsted Morænens løse Materialier saa hurtigt, som Bræen bygger op. Under enhver Bræ løber en Elv, og under Bræerne i de grønlandske, Isfjorde maa disse, som paavist af Dr. Rink

være meget store; igjennem Bræerne som gjennem Indlandsisen søger om Sommeren Elve ned gjennem Mouliner til det faste Fjeld, og gjennem Moulinerne og Sprækkerne og gjennem de ved Elvene under Isen frembragte Kanaler maa der om Vinteren, da Temperaturen er omkring 0 Grader i selve Bræen, og meget under 0 Grader i Luften, finde Sted en livlig Veirvexling, saa at det under Bræen paa det faste Fjeld strømmende Vand af 0 Grader overalt fryser og løsbryder, hvor den kolde Luft strømmer ned. Efterhaanden som det løsbrudte Materiale skurer paa Fjeldet, fremkommer mere og mere Skuringsmateriale; Elvene bortskaffer efterhaanden dette, men foreger det sandsynligvis ogsaa tildels, nemlig hvor de rindende Vande ved sin kemiske Virksomhed har optæret og løsnet Stumper og Stykker af Fjeldet efter Sletter og Afslæningsflader. Hvilken der er den virksomste af disse Agenter er vanskeligt at afgjøre; i denne Forbindelse er det os tilstrækkeligt, hvad der er iagttaget og kan sees til Exempel, der hvor Bræen Umiatorfik ender med en lodret Kant i Vandskorpen ved Umanaksfjorden, nemlig, at Bræen hviler paa Masser af Skuringsmateriale. Tænkes Bræen fortsættende sit Arbeide, saa vil der fremkomme: først en større Strækning af Fjorden udfyldt med løse Materialier, hvilke Masser, om Landet stod høiere, vilde danne en Terrasse; videre vil der fremkomme en Moræne, og endelig fordyber Bræen under det fortsatte Arbeide sit Underlag. At det løse Slam kommer ned under Bræen og udfylder Fjorden i en betydelig Udstrækning kan ikke være Gjenstand for Tvivl, og lige-saalidt kan det betvivles, at Bræen skurer paa sit Underlag, og derved borttager Dele af Underlaget; men at Dalbunden fordybes stadigt, naar der stadigt tages Sten fra samme, kan heller ikke være Gjenstand for Tvivl. Spørgsmaalet om, hvormeget Naturen i Tidernes Løb har udrettet ved dette Arbeide, bliver da tilslut et Spørgsmaal om Tiden. Men Tiden kan kun maales efter det udførte Arbeide og Arbeidsmaaden; man kan ei omvendt slutte sig til, om Naturen

har arbeidet paa en bestemt Maade efter den Tid, som maa forudsættes at have været nødvendig til at udføre Arbeidet paa denne Maade.

Bevæger en Bræ sig over en jævnt skraanende Dalbund, da vil der danne sig en Indsø under Bræen, hvilken Indsø vil tage sin Begyndelse ved Bræens Endepunkt, og hvis Længde vil afhænge af Dalbundens oprindelige Skraaning samt af det Dyb, Erosionen naar; Dybden igjen vil afhænge af Bræens Hastighed, Mægtighed, Tilgangen paa Skuringsmateriale og Underlagets petrografiske Beskaffenhed. Hvis den nederste Del af en Isbræ bevæger sig til Eksempel paa en Strækning af 1 Mil over en horizontal Dalbund, da vil Resultatet af Bræens Arbeide blive en Indsø, hvis Længde i det mindste er lig 1 Mil, eller den Strækning af Dalbunden, der oprindelig var horizontal. Thi Erosionen foran Bræens Endepunkt er Nul; hvis Bræen derfor ved sin Erosioh naar et Dyb af 10 Fod, saa vil Underlaget paa hele Strækningen under Bræen ligge indtil 10 Fod dybere end Dalbunden foran Bræen, følgende vil der fremkomme en 10 Fod dyb Indsø. Hvis Dalbunden har en Heldning, da vil Indsøens Længde komme til at afhænge af Dalbundens oprindelige Skraaning. Stiger Dalbunden til Eksempel 1 Fod for 100 Fod, og Bræen eroderer til Eksempel til et Dyb af 10 Fod, da vil Indsøen blive 1000 Fod lang; thi et Punkt beliggende 1000 Fod fra Bræens Endepunkt vil med en Skraaning af 1 paa 100 ligge 10 Fod høiere end Bræens Endepunkt, og Indsøen vil altsaa ende her, naar Erosionen har naaet et Dyb af 10 Fod. Eroderer Bræen til et Dyb af 100 Fod, da vil Indsøen med den antagne Stigning faa en Længde af 10000 Fod. Det indsees let, at under forøvrigt lignende Forhold vil en stærkt skraanende Dalbund faa kortere Indsøer end en svagt skraanende.

Den nuværende glaciale Tilstand i Grønland naar som paavist fortiden ikke sin høieste Udvikling. Landet giver fortiden ei heller et Billede af Norge i den Tid, da Bræerne naaede



sin største Udbredelse i dette Land, men Tilstanden i Grønland danner et Sidesykke til Forholdene i de vestlandske Fjorddale under Slutningen af Istiden, da Bræerne her gik et Stykke ud i Fjordene og dannede de Indsøer, der optræder nedenfor Fjordbunden, spærrede af Moræner og Terrasser.<sup>1)</sup>

Direkte at paavise, at der under Isbræerne i de grønlandske Dale og Fjorde ligger Indsøer, er neppe muligt. Hvis man kunde komme til Dale, hvorfra Bræerne nyligt havde trukket sig tilbage, saa maatte her findes Indsøer, hvis Bræen har arbeidet længe nok og har været mægtig nok. En saadan Dal kan jeg paavise i Grønland. Som omtalt tidligere løber Torsukatak Isbræ ud i fire Arme. Den nordligste Arm er ved en Aas eller en Fjeldryg skilt fra et Dalføre, der optræder nogenlunde symmetrisk i Forhold til de fire Arme af Isfjorden. Men dette Dalføre er nu frit for Isbræ; derimod ligger der i samme nær Havet en Inse ved Navn Amitsok, ved Siden af hvilken der findes Levninger af en Sidemoræne. Morænen viser, at dette Dalføre har dannet en femte Arm af Torsukatak Ismasse; men Bræen har nu trukket sig tilbage fra denne Arm efterladende en Indsø.

Maaske giver Fjorden Ilartdlek med den foran samme ved Strømstedet ved Pakitsok liggende Moræne et lignende Exempel. Som omtalt tidligere ligger der ved Indløbet til Ilartdlek en Moræne paa omtrent 25 Meters Høide. Igjennem denne Moræne er der skaaret to grunde Løb, gjennem hvilke Strømmen gaar med Voldsomhed ved Høivande og Lavvande, saaledes at man da ikke kan med Baad ro ind i Ilartdlek. Forholdene ved dette Strømsted er maaske fremkomne paa den Maade, at Bræen fra Indlandsisen engang har naaet frem til det nuværende Strømsted, her ophobende en Moræne og fordybende Underlaget indenfor Strømstedet. Da Bræen trak sig tilbage, var der i ringe Høide over Havet afdæmmet en Indsø, hvilken søgte Afløb

<sup>1)</sup> Man sammenligne „Om Beliggenheden af Moræner og Terrasser foran mange Indsøer“.

gjennem Morænen, og efterhaanden skar den fra Indseen udløbende Elv sit Leie saa dybt i Morænen, at Elveleiet blev til et Strømssted.<sup>1)</sup> At der, saavel i Grønland som i Norge findes et stort Antal Indsøer, der ikke er spærrede af Moræner og Terrasser, og som ikke er dannede ved Bræernes Endepunkter, men midt under Isdækket, er i fuld Overensstemmelse med den glaciale Theori for deres Dannelse. Thi enhver Forøgelse af Isbræernes Mægtighed eller af deres Hastighed, eller en foretøgt Tilgang paa Skuringsmateriale, eller Fremkomsten af en Bergart, der er mere skikket til Erosion end andre, vil bevirke, at Bræen ved Erosionen naaer et større Dyb, eller Dannelsen af en Indsø.

De store Fjorde, der fra Havet sætter milevidt ind i Landet i Grønland, bærer i det hele den samme almindelige Karakter som Fjordene i Norge. Om disse sidste er det paavist at der i dem findes ganske eiendommelige Dybdeforhold, idet Dybet inde i de trange Fjorde er større end Dybet i det aabne Hav udenfor; saaledes at Fjordene, om Landet og Havbunden tænkes at ligge høiere, vilde blive Rækker af store Indsøer. Videre er det paavist, at der foran Enden af disse Fjorddyb optræder store Masser af løse Materialier, som underseiske Moræner. Disse Dybdeforhold er da en Følge af deres Dannelse ved Bræer, idet Underlaget i de af Bræer fyldte Fjorde stadigt fordybedes, medens det aabne Hav udenfor udgrundedes. Skjønt Dybdeforholdene langs de grønlandske Kyster er saare lidt undersøgt, saa fremgaar det dog klart nok af det lidet, der vides, at man i de grønlandske Fjorde gjenfinder de samme eiendommelige Dybdeforhold som i de norske. Hvad de Fjorde, som udsender Isbjerge, angaar, saa fremgaar det allerede deraf, at Iskolosserne kan flyde i Fjordene, at disse sidste maa have et stort Dyb. Som tidligere omtalt har Jakobshavns Isfjord et Dyb paa omtrent 390 Meter, der hvor der fiskes. Efter An-

<sup>1)</sup> Da det faste Land i Grønland synker, har maaske ogsaa dette Forhold bidraget til at forandre Elven til en veksellende Strøm.

tallet og Længden af de Nøgler med Bindegarn, som Grøn-  
lænderne angive som nødvendige forat naa Bund i Torsukatak  
Isfjord, er Dybden her noget udenfor Isbræen 346 Meter.  
Sviter af Lodninger fra det indre af Fjordene til deres Mun-  
dinger er nødvendige for at undersøge om Fjordene i Grønland  
saaledes som i Norge viser et i det Hele i de indre Fjorde  
tiltagende, senere ud imod Fjordmundingen aftagende Dyb. At  
dette dog finder Sted ved Jakobshavns Isfjord fremgaar af den  
Omstændighed, at de store Isfjelde, der kan flyde i Fjordens  
indre Del, staar paa Grund ved Fjordmundingen.

Foran Enden af Fjorddybene optræder der i Norge Banker  
bestaaende af løse Materialier, der maa antages at være udførte  
af Bræerne under deres Erosioner af Fjorddybene. Af det Kart,  
der findes over «Sydgrønlands nordlige Distrikter» i Dr. Rinks  
Verk «Grønland» Bind 2, fremgaar det, at der udenfor Fjor-  
dene her optræder Havbanker svarende til dem, man finder  
udenfor Kysterne af Norge. Udenfor Godthaabs-Fjorden sees  
saaledes en Torske-Banke paa 20—30 Favne, udenfor Fjordene  
i Sukkertoppen en Banque paa 30 Favne, udenfor Fjordene i  
Holstensborg Banker paa 14 til 17 Favne. Om Existensen af  
Banken udenfor Holstensborg har jeg havt Anledning til at  
overbevise mig ved Lodninger under Reisen udenfor dette  
Distrikt. Ligheden mellem Dybdeforholdene i Davisstrædet  
udenfor den grønlandske Kyst viser altsaa, efter det lidet man  
ved, en fuldstændig Analogi med Dybdeforholdene i Nordsøen  
udenfor den norske Kyst. Store Fjorddyb inde ved Landet, og  
ofte i flere Miles Afstand fra Land et mindre Dyb, der hæver  
sig til Fiskebanker.

Af de faa Observationer, som foreligger fra de grønlandske  
Fjorde og Kyster, synes det altsaa at fremgaa, at Fjordene  
langs den grønlandske Kyst som langs den norske vilde, om  
Landet laa høiere, danne en Række dybe Indsøer med foran-  
liggende Banker.

# OM TÆLLINGEN AF DE RÔDE BLODLEGEMER EFTER MALASSEZ's METHODE

AF

JAKOB WORM MÜLLER.

## § 1.

Malassez's Maade<sup>1)</sup> at tælle Blodlegemernes Antal paa er i Principet ingenlunde ny; den er kun en hensigtsmæssig Modifikation af Vierordts og Welckers Tællingsmethode. Men desuagtet er den at betragte som et væsen'tligt Fremskridt i Fysiologien og Pathologien, da Tællingerne ske med Hurtighed og Sikkerhed og der blot udfordres et ganske lidet Kvantum (1 à 2 Draaber) Blod.<sup>2)</sup>

De enkelte Akter, hvori Fremgangsmaaden kan deles, ere ligesom hos Vierordt og Welcker følgende:

1. Bestemmelsen af Blodvolumet,
2. Blandingen af Blodet med en Fortyndingsvædske. Som bekjendt er det neppe muligt og i ethvert Fald yderst besværligt at tælle Blodlegemerne i det ufortyndede Blod,

---

<sup>1)</sup> L. Malassez: „De la numération des globules rouges du sang“. Paris. Adrien Delahaye 1873.

<sup>2)</sup> Man kan derfor med Lethed anvende, samme i medicinsk Praxis; man behøver blot at gjøre et lidet Indstik i en Finger eller bedre i Ørelappen (lobulus auris), der er mindre følsom.

### 3. Forfærdigelsen af Præparatet, hvori Blodlegemerne tælles under Mikroskopet.

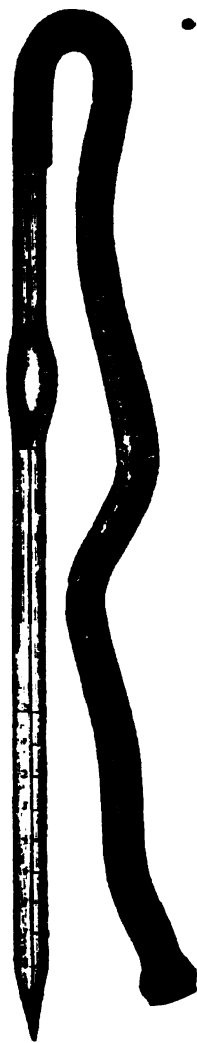


Fig. 1.

- ad 1 og 2. For at faa en homogen og næiagtigen titreret Blanding af Blod og Fortyndingsvædske anvender Malassez et Glasrør (cfr. Figur 1, naturlig Størrelse) med tykke Vægge, som efter Opfinderen kaldes «mélangeur Potain». Den indeholder en lang kapillærformig Kanal, som henimod den øvre Ende har en ampulleformig Udvidning, indenfor hvilken en liden bevægelig Glaskugle, der tjener til at blande Blodet og Fortyndingsvædsken intimt med hinanden, befinder sig. Melangeuren er ved Hjælp af Kviksølv graderet saaledes, at Indholdet af den lange kapillære Kanal nedenfor Udvidningen er  $\frac{1}{100}$  af den udvidede Del; denne Kanal er atter ved et Mærke paa Midten delt i 2 ligestore Dele, hvoraft selvfølgeligen hver enkelt Del er  $\frac{1}{200}$  af den udvidede Portion.<sup>1)</sup>

Ved Hjælp af en liden Kautschukslange, som anbringes paa det korte Parti ovenfor Udvidningen, opsuger man det Blod, som skal undersøges, indtil det ene eller andet af de 2 beskrevne Mærker paa den lange kapillærformige Kanal, medens man fixerer Øiet paa det respective Mærke; at man ved Aflesningen af Blodsøilens Stand konstant holder Melangeuren i den samme Stilling enten horizontalt eller vertikalt, falder af sig selv. Man tæller derpaa Spidsen af Melangeuren,

<sup>1)</sup> Ved Blod, der indeholder et større Antal Blodlegemer, f. Ex. 5—6 Millioner paa hver Kubikmillimeter, anvender man helst Fortyndingsgraden 200 eller endnu større Fortyndingsgrad, ved Blod derimod, der er fattigere paa Blodlegemer, Fortyndingsgraden 100 eller en endnu mindre Fortyndingsgrad.

dypper denne i Fortyndingsvædsken<sup>1)</sup> og opsuger samme indtil det Mærke, som findes ovenfor Udvidningen. Er dette skeet, ryster man Blandingen godt ved Hjælp af den lille Glaskugle, som findes i den ampulleformige Udvidning.

Anm. Det er af Vigtighed, at Opsugningen af Blodseilen og Fortyndingsvædsken sker hurtigt, for at der ikke skal opstaa Koagula, fordi ethvert Koagulum, selv det mindste, bevirker, at Resultaterne blive upaalidelige. Disse Koagler indeslutte endel Blodlegemer, som altsaa unddrages Blandingen; ikke sjældent hænder det, at de under Udblæsningen træde ud i Melangeurens kapillærformige Kanal og tilstoppe eller forsnævre samme. Det gjælder som Regel, at Blodblandinger, der indeholde selv de mindste Koagler, bør forkastes.<sup>2)</sup>

ad 3. En à to Draaber af Blandingen blæses ud paa et Objektglas, hvortil (ligesom hos Vierordt) er fæstet et Kapillærrør, hvori Blandingen opsuges og Blodlegemerne tælles. Dette Kapillærrørs hensigtsmæssige Konstruktion har været forbunden med mange Vanskeligheder.<sup>3)</sup> «Il fallait: Que les parois du tube fussent planes, afin d'éviter les phénomènes de réfraction;

Que la lumière du canal fût également aplatie dans le même but, et aussi pour que les globules ne s'accumulassent pas dans les parties déclives;

Que le canal fut assez étroit pour qu'il pût tenir dans le champ du microscope, assez aplati pour que les globules ne fussent pas à des plans trop différents, assez large cependant pour qu'ils puissent y pénétrer facilement;

Que ce canal enfin fût parfaitement calibré, c'est-à-dire que pour les longueurs égales il eût des volumes égaux; qu'il pût

<sup>1)</sup> Som Fortyndingsvædske (sérum artificiel) er en (5 pCt.) svovlsur Natronopløsning at anbefale, fordi den forholdsvis mindst forandrer Blodlegemernes Form.

<sup>2)</sup> Hos enkelte Hunde indtræder Koagulationen af og til saa rapid, at gentagne Forsøg blive nødvendige, førend det lykkes at erholde en homogen Blanding.

<sup>3)</sup> Malassez l. c. S. 17—18.

être très-exactement cubé, c'est-à-dire qu'on pût en déterminer le volume pour une longueur donnée.»

Efter mange Forsøg lykkedes det Malassez at opfylde alle disse Betingelser: «Voici comment:

«On prend un de ces tubes capillaires en verre à lumière centrale aplatie, dont on se sert pour construire certains thermomètres à mercure; il faut en choisir dont le grand axe mesure de 240 à 260  $\mu^1$ ), 250 en moyenne, et le petit axe de 60 à 80  $\mu$ . On le calibre, et on ne garde que les portions qui, pour des longueurs égales, ont des volumes égaux.

Ces portions sont usées sur une meule d'opticien, de chaque côté, parallèlement au grand axe du canal. Un des côtés doit être plus usé que l'autre, de façon que la face qui en résulte, et que j'appellerai supérieure, soit le plus près possible du canal central. . . . Le tube thermométrique se trouve alors réduit à une petite bande de verre ayant à son intérieur, plus près de la face supérieure que de l'inférieure, un canal central aplati dans le même sens que la bande de verre. Une des extrémités est relevée sous forme d'un petit tube cylindrique très-court, sur lequel on peut adapter un tube en caoutchouc, ce qui . . . permettra de nettoyer le capillaire.»

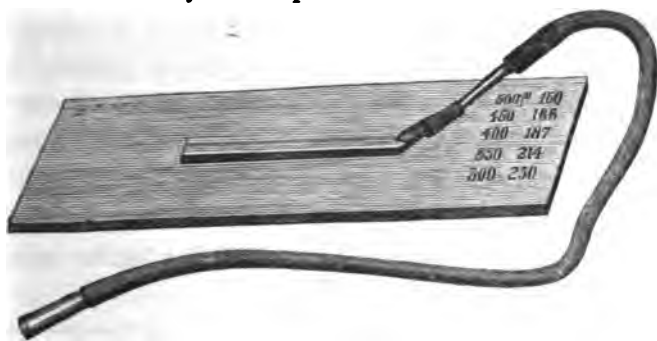


Fig 2.

Dette Kapillærrør (Capillaire artificiel Malassez, cfr. Fig. 2) er af Instrumentmageren kalibreret ved en bestemt Tem-

<sup>1)</sup>  $\mu = 0,001 \text{ mm.}$

peratur ved Hjælp af Kviksølv, saa at man kjender den Brøkdelen af en Kubikmillimeter, som Indholdet af en vis Længde af Røret udgjør.

De nødvendige Data ere af Instrumentmageren graverede paa Objektglasset (cfr. Fig 2). Den første Siffercolonne angiver en vis Længde af Røret, den anden det Tal, med hvilket man maa multiplicere Antallet af Blodlegemerne i den tilsvarende Længde af Røret for at faa Antallet i 1 Kubikmillimeter; f. Ex. har man i det paa Fig. 2 afbildede Rør tallet i en Længde af 500  $\mu$ , multiplicerer man det fundne Antal med 150; med andre Ord 500  $\mu$  er 150de Delen af Længden, der indtages af 1 Kubikmillimeter, eller, om man saa vil udtrykke sig, Kanalens Volumen for en Længde af 500  $\mu$  er 150de Delen af en Kubikmillimeter.

For nu at kunne tælle Blodlegemerne i en Længde af 500  $\mu$ , 400  $\mu$ <sup>1)</sup> o. s. v. betjener Malassez sig af et i Kvadrater inddelt Glas (oculaire quadrillé micrométrique cfr. Fig. 3), der indlægges i Okularet (ovenfor sammes Kollektivlinse) saaledes, at dens i Kvadrater inddelte Flade vender nedad; Afstanden mellem den første Delstreg paa den ene Side og den sidste paa den modsatte Side bestemmes ved Hjælp af et Objektivmikrometer til 500  $\mu$  eller 400  $\mu$  o. s. v. Ombytter man nu Objektivmikrometret med «Capillaire artificiel Malassez», vil naturligvis det indenfor Afstanden af hine Delstreger værende Parti af Kapillærrøret svare til denne bestemte Længde. Mikroskopet maa i den samme Undersøgelsesrække blive staaende i den samme Position (som man kan notere paa Mikroskopets Tubus) med det samme Okular og det samme Objektiv.

---

<sup>1)</sup> 500 og 400  $\mu$  ere hensigtsmæssige Længder. Man anvender fordelagtigt paa Hartnack'ske Mikroskoper Objektiv 5 og Okular 2, ved hvilken Forstørrelse man med Sikkerhed ialm. kan adskille de røde og hvide Blodlegemer; den korte Fokaldistants ved Hartnacks Mikroskoper lægger her nogen Hindring iveien for stærke Objektivers Anvendelse.



Ved at multiplicere det i denne Længde fundne Antal Blodlegemer (f. Ex. 120) med Konstanten (f. Ex. 150 for Kapillærrøret paa Fig. 2 ved  $500\ \mu$  Længde) samt Fortyndingsgraden (f. Ex. 200), erholder man Blodlegemernes Antal i 1 Kubikmillimeter.

$120 \times 150 \times 200 = 3,600,000$  Blodlegemer i 1 Kubikmillimeter.

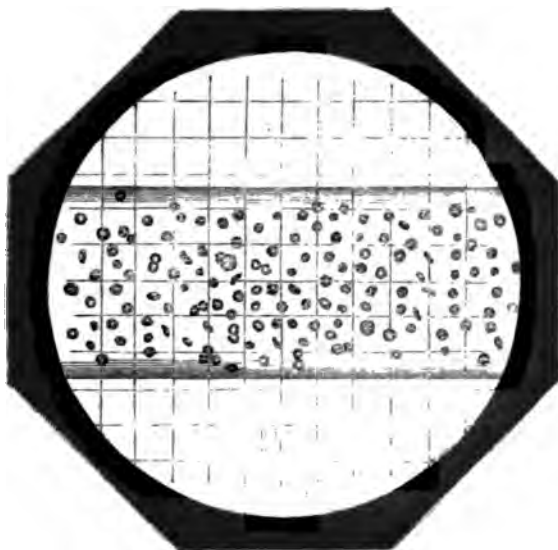


Fig. 3. — Capillaire artificiel, fyldt med en Blodblanding og betragtet i Mikroskopet med et oculaire quadrillé micrométrique (100 Ganges Forstørrelse).

## § 2.

Den specielle Teknik er yderlig simpel.

Efterat Blandingen er skeet i Melangeuren, blæser man først ud den Vædskeseile, som befinder sig foran Mundingen (denne Vædskeseile, der ene og alene indeholder den svovlsure Natronopløsning, kan naturligvis ikke komme i Betragtning) samt 1 til 2 Draaber af Blandingen, hvorpaa man udblæser en Draabe paa Objektglasset foran den frie Munding af Kapillærrøret og omrører denne med en Glasspids eller den spidse Ende af Melangeuren, for at den Vædske, som opsuges i Røret, kan

indeholde en homogen Blanding. Hvis Vædsken ikke trænger hurtigt ind, kan man let hjælpe derpaa ved en svag Aspiration igjennem Kautschukrøret. Naar den opsugede Vædske nærmer sig Kapillærrørets anden Munding, borttørres man enten med fint Linned eller med Trækpapir den resterende Del af Draaben paa Objektglasset.

Man bringer nu Kapillærrøret under Mikroskopet og tæller Blodlegemerne i hele den Portion af Kanalen, som er bedækket af Kvadraterne paa «oculaire quadrillé micrométrique». Man tæller bedst continuerligt i en bestemt Direktion f. Ex. fra Venstre til Høire (eller fra Høire til Venstre) og regner de Blodlegemer, der ligge paa de vertikale Delstrege mellem Kvadraterne, constant til de venstre (resp. høire) Kvadrater. Man maa ikke lade sig nøie med 1 Tælling men gjøre 2, 3—4 paa forskellige Steder af Kapillærrøret for at være vis paa, at Blodlegemerne ere jævnt fordelte; af disse Tællinger tages da Middeltallet.

Tællingerne maa ikke ske i Nærheden af Kapillærrørets frie Munding. Resultatet er her vaklende, da Antallet hyppigen findes mindre men undertiden ogsaa større end i den øvrige Del af Røret; man bør i ethvert Fald aldrig tælle i en større Nærhed af denne Munding end  $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$  Centimeter og helst holde sig til den midtre Del af Kapillærrøret.

Efter Tællingen er det paatrængende nødvendigt omhyggeligen at rense Kapillærrøret og Melangeuren ved Hjælp af destilleret Vand. For at tømme Melangeuren anbringer man fordelagtigst Kautschuktuben paa Melangeurens lange Parti og udblæser fra denne Kant; derpaa kan man bringe Kautschuktuben tilbage til dens sædvanlige Plads, opsuge destilleret Vand, ryste Apparatet godt og udblæse Vandet. Er Melangeuren tilstoppet af Blodkoagler, renser man samme bedst ved Hjælp af Kali- eller Natronlud (mindst 25 pCt.) og skyller derpaa Røret gjen- tagne Gange med destilleret Vand, som opsuges. For at rense

Capillaire artificiel Malassez udblæser man Vædsken igjennem Kautschuktuben og borttørrer med fint Linned eller Trækpapir det udtraadte Fluidum; man bringer derpaa nogle Draaber destilleret Vand paa Objektglasset foran Kanalens Munding og, naar de ere komne henimod Rørets anden Ende, blæser man dem ud, fylder atter med destilleret Vand o. s. v. Tilsidst tørrer man Apparatet ved nogle Gange at indsuge Luft gjennem Kautschukrøret og undersøger nu under Mikroskopet, om Rørets Lumen er fuldstændig frit for fremmede Partikler.<sup>1)</sup>

Denne Methode er bekvem og hurtig; man kan efter nogen Øvelse med Lethed i 20 Minuter foretage Blandingen, udføre Tællingerne samt rense Apparaterne. Methoden er tilstrækkelig nøiagtig, Feilene ere forholdsvis ubetydelige, dog i Regelen større, end Malassez (og i sin Tid Vierordt og Welcker) have angivet. Da det er af Vigtighed, at de, som ville anvende denne Tællingsmethode, fra Begyndelsen af skarpt vurdere den Grad af Nøiagtighed, som de kunne erholde ved samme, skal jeg korteligen her meddele Resultatet af mine Erfaringer i saa Henseende.

### § 3.

For at komme til nærmere Kundskab om Methodens Nøiagtighed, betjener man sig hensigtsmæssigen af følgende Prøver:<sup>2)</sup>

1. Man tæller gjentagne Gange Blodlegemerne i en og samme Længde af Kapillærrøret. I dette Tilfælde faar man efter min Erfaring, hvis man først paabegynder Tællingen, efterat Blodblandingen er kommen til Ro i Kapillærrøret, næsten altid det samme Resultat. Tæller man methodisk

<sup>1)</sup> Apparaterne erholdes hos Optikeren C. Verick, Paris, rue de la parcheminerie 2.

<sup>2)</sup> cfr. Malassez l. c. S. 27—33; ctr. ogsaa K. Vierordt „Untersuchungen über die Fehlerquellen bei der Zählung der Blütkörperchen“ i „Archiv für physiologische Heilkunde. A. 1862. B. XI. S. 858—874.

og med spændt Opmærksomhed, ville Afvigelserne i Tællingen af 200—400 Blodlegemer være meget ringe; de oversteg i mine Forsøg sjældent  $\frac{1}{2}$  pCt. og yderst sjældent 1 pCt. Disse Afvigelser afhang neppe af Unøjagtighed ved Tællingen; de ere, som jeg tror, væsentligen betingede deraf, at det ikke sjældent varer længere Tid, inden Blodlegemerne komme fuldstændigen til Ro, saa at enkelte af dem kunne have skiftet Plads fra den ene Tælling til den anden.

2. Man tæller paa forskjellige Steder af Kapillær-røret i en og samme Længde. Man vil da finde større Differentser. Efter Malassez bør disse ikke beløbe sig til mere end 2 à 3 pCt. og han tilføier, at, hvis de ere større, har man heri et Bevis for, at Forsøget er faldet uheldigt ud, og at en ny Prøve er nødvendig. Afvigelserne ere efter min ikke ringe Erfaring ofte større, uden at man kan paavise nogen Feil. Jeg har sammenstillet Resultatet af Tællingerne af 274 Blodprøver hos Hunde. Hver enkelt Prøve blev sædvanlig tællt paa 3 forskellige Steder af Røret, undertiden paa 2 eller 4 og enkelte Gange endogsaa paa 5 Steder; det samlede Antal Tællinger beløb sig til 694. De enkelte Tællingers Afvigelse fra det for hver Blodprøve fundne Middeltal var gjennemsnitlig 2,2 pCt. (og Differentsten af de to største Afvigelser i Tællingen af hver enkelt Blodprøve var i Gjennemsnit 4,9 pCt. af Middeltallet).<sup>1)</sup> Den

<sup>1)</sup> Jeg kan her for Rummets Skyld ikke anføre samtlige Tællinger men vil blot indskrænke mig til et Par Exempler.

Middeltallet af Tællingerne.	De enkelte Tællinger. Blodlegemernes Antal i 1 Kubikmillimeter.		De enkelte Tællingers Afvigelse fra Middeltallet udtrykt i pCt. af Middeltallet.	Differents af de 2 største Afvigelser udtrykt i pCt. af Middeltallet.
5,143600	No. 1	4,862000	÷ 5,5	12 pCt.
	" 2	4,972000	÷ 3,3	
	" 3	5,038000	÷ 2,1	
	" 4	5,368000	+ 4,4	
	" 5	5,478000	+ 6,5	
5,705333	No. 1	5,698000	÷ 0,1	0,3 pCt.
	" 2	5,698000	÷ 0,1	
	" 3	5,720000	+ 0,2	

gjennemsnitlige Afvigelse 2,2 pCt. er ikke ringe; den er væsentlig betinget derved, at enkelte Tællinger viste store Uoverensstemmelser. Af hine 694 Tællinger viste nemlig 73<sup>1)</sup> en Afvigelse af 5 pCt. eller derover. Trækker man disse Tællinger fra, hvor Afvigelsen beløb sig til 5 pCt. eller derover, bliver den gjennemsnitlige Afvigelse fra Middeltallet 1,6—1,7 pCt. Altsaa hvis man forkaster saadanne Tællinger, der vise store Uoverensstemmelser, som Malassez og Andre have gjort, erholder man meget mindre Differentser, men der foreligger ingensomhelst Berettigelse til at forkaste afvigende Tællinger, naar man ikke kan paavise nogensomhelst Feil ved Behandlingen og Tællingen af Præparatet. I 40 Tællinger af 14 Blodprøver fra Kaniner var Afvigelsen fra Middeltallet udtrykt i Procenter af samme i Gjennemsnit 3,4 (Differentsen af den største Afvigelse = 11 pCt.), af disse 40 Tællinger afvege 11 5 pCt. eller mere; trækkes disse fra, var Afvigelsen i de øvrige 29 Tællinger i Gjennemsnit kun 1,9 pCt.

Anm. Ved Lammesblod var Afvigelsen i Gjennemsnit 2,6 pCt., ved Katteblod 1,7 pCt.

Hos Fræerne med sine faa Blodlegemer stiller Forholdet sig ugunstigere. I de faa Tællinger, jeg har udført med Fortyndingsgraden 200, beløb Afvigelsen fra Middeltallet sig i Gjennemsnit til 8 pCt. og Differentsen af de stærkeste Afvigelser til 24 pCt. Disse store Afvigelser hos Dyr med færre Blodlegemer vil jeg foreløbig lade ud af Betragtning, da mit Material er for lidet; det er antageligt, at de betydeligen ville kunne formindskes, hvis man anvender en mere concentreret Blanding f. Ex.  $\frac{1}{10}$  eller tæller i en større Udstrækning.

Disse Differentser ere sandsynligvis betingede af, at den i Røret opseggede Blanding af en eller anden ubekjendt Aarsag ikke har været homogen.

3. Man sammenligner Middeltallet af en paa flere Steder af Kapillærrøret tællt Blanding med det Mid-

<sup>1)</sup> Af disse 73 Tællinger afvege 56 fra 5—7 pCt., 12 fra 7—10 pCt. og 5 fra 10—13 pCt.

deltal, der erholdes, naar Kapillærrøret atter fyldes med en ny Portion af samme Blanding. Sjelden afvige disse Middeltal mere end 2 pCt. fra hinanden, og tages Middeltallet for hver Prøve af 4—5 Tællinger, er Afvigelsen næsten stedse ringere end 1 pCt. Og tog man nu Gjennemsnittallet af de paa denne Maade erholdte Middeltal, vilde man faa et endnu nøiagtigere Tal, saa at Methoden omhyggelig kontrolleret giver ønskelig Garantie.

4. Man tæller 2 eller flere Prøver af Blod fra det samme Sted og sammenligner Middeltallene med hinanden. Jeg har i 108 Forsøg (216 Prøver) tællt 2 Prøver fra Læberne hos Hunde (og Kaniner) og sammenlignet Resultatet af Tællingerne. Differentseen af det for hver Blodprøve fundne Tal fra Middeltallet af begge Blodprøver beløb sig i Gjennemsnit kun til 2,17 pCt.<sup>1)</sup>, den var kun i 9 Forsøg 5 pCt. eller derover — og Differentseen af begge udtrykt i pCt. af Middeltallet altsaa det Dobbelte 4,34 pCt.

Anm. Hos Frøerne vare i 3 Forsøg Afvigelserne i Gjennemsnit 4,57 pCt. (resp. 9,14 pCt.).

Denne Overensstemmelse mellem Blodprøver fra det samme Sted men erholdte ved forskellige Indstik kunde man ikke paa Forhaand uden videre vente. Afseet fra, at Aflesningen af den i Melangeuren opsugede Blodsøiles Stand ikke kan være constant absolut nøiagtig den samme for hver ny Prøve, var det af flere Grunde usikkert, hvilke Resultater man vilde erholde, naar to fra et og samme Sted af Legemet tagne og paa bestemt Maade fortyndede Blodprøver sammenlignedes med hinanden. Det var nemlig ikke usandsynligt, at Biblandingen

<sup>1)</sup> For Tydeligheds Skyld anføres et Exempel:

	Blodlegemernes Antal i 1 Kubikmillimeter.	Differentseen fra Middeltallet udtrykt i pCt. af samme	Differentseen af begge Prøver udtrykt i pCt. af Middeltallet.
Indstik 1 (Løben) . .	5,940000	0,4	0,8 pCt.
Do. 2 Do. . .	5,896000	0,4	

af liquor nutritius fra Nabodelene af Stiksaaret kunde forarsage smaa Forstyrrelser, og at det Tryk, der ofte anvendes for at befordre Blodets Udtrædelse igjennem det lille Indstik, havde kunnet betinge større Afvigelser i Tællingerne af Blodprøverne; denne Antagelse har altsaa, som det synes, liden eller ingen Betydning.

Af det Foregaaende fremlyser, at denne Methode er tilstrækkelig exakt for sædvanlige Undersøgelser, hvor det blot gjælder at erholde relativt rigtige Tal. Om Tallenes absolute Rigtighed kan man ikke komme til nogen bestemt Kundskab, uden at man selv kalibrerer Apparaterne ved Hjælp af Kviksølv og paa denne Maade kontrollerer Instrumentmageren. Da Tællinger erholdte ved forskellige Melangeurer og Kapillærrør ikke sjældent kunne afvige 4 à 5 Procent, ja muligens endnu mere, er en saadan Kontrol paa sin Plads. En saadan har jeg selv hidtil ikke udført, og derfor har jeg ikke villet anføre Resultatet af mine Tællinger af Blod hos forskellige Dyrklasser i sin Almindelighed.

#### § 4.

Efterat have overbevist mig om denne Methodes Fortrinlighed, var det af Vigtighed ved en Række Undersøgelser at faa Oplysninger om følgende Punkter:

1. Give Tællingerne af 2 eller flere Prøver af et og samme defibrineret Blod ligesaa overensstemmende Resultater som Tællingerne af flere Prøver af et og samme ikke defibrineret Blod?

Jeg har i 26 Forsøg (52 Prøver) med alle Kauteler tællt 2 forskellige Prøver af et og samme defibrineret Blod og sammenlignet Resultaterne. Differentsten af det for hver enkelt Prøve fundne Tal fra Middeltallet beløb sig i Gjennemsnit til 3,04 pCt., altsaa Differentsten af begge Prøver til det Dobbelte nemlig 6,08 pCt. Afvigelsen var saaledes temmelig stor; det defibrinerede Blod er derfor, hvad jeg allerede i min forrige Af-

handling<sup>1)</sup> har paapeget, mindre tjenligt til Blodtællinger, og det er fuldstændig ubrugbart, hvis det ikke stærkt rystes for hver Gang, man tager en Blodprøve, da i andet Fald det øverste Lag indeholder et meget færre Antal Blodlegemer end de nederste. I disse mine Forsøg blev det defibrinerede Blod meget stærkt rystet, før Blodprøven toges, og dog var, som vi just have seet, Afvigelsen ikke ringe. Denne Forskjel har en vis Interesse, forsaavidt som den giver os et bestemt Bevis for, med hvilken Forsigtighed det defibrinerede Blod maa anvendes saavel til Blodanalyser som til Farvekraftbestemmelser.

2. Hvorlænge kan man opbevare defibrineret Blod, uden at Blodlegemernes Antal mærkeligen aftager?

Blodlegemerne kunne, som jeg allerede i min forrige Afhandling har vist, taale en Opbevaring i 24 Timer paa et koldt Sted, uden at man kan paavise nogen Formindskelse af Blodlegemernes Antal, men efter nogle (3—4) Dages Forløb er Blodlegemernes Antal hyppigen mærkbart aftaget, saa at Blodet ikke mere er brugbart til Tællinger. Destruktionen tiltager med Opbevaringstiden; efter 4 Uger er Destruktionen ikke sjelden saa vidt fremskreden, at intet Blodlegeme med Bestemthed kan paavises, selv om Blodet har været opbevaret den hele Tid i et godt tillukket Kar paa et koldt Sted. Mine Erfaringer i saa Henseende indskrænke sig forevrigt saagodtsom udelukkende til Hundeblod<sup>2)</sup> og skal jeg som Belæg anføre nogle Exempler:

Forsøg 1. Blod opbevaret i 4 Dage; Blodlegemernes Antal den første Dag 9,218000<sup>3)</sup> i 1 Kmm., 3 Dage derefter kun 8,602000, altsaa en Aftagelse af ca. 7 pCt.

Forsøg 2. Blod opbevaret i 1 Uge. Blodlegemernes Antal den første Dag 6,402000, 6—7 Dage derefter 5,962000, altsaa en Aftagelse af ca. 7 pCt.

<sup>1)</sup> cfr. Jakob Worm Müller „Transfusion und Plethora“. Christiania 1875. S. 12.

<sup>2)</sup> Hundeblod synes forevrigt at forholde sig noget forskjelligt i sin Resistens.

<sup>3)</sup> Blodlegemernes Antal hos dette Dyr kunstigen forøget ved Transfusion.



Forsøg 3. Blod opbevaret i ca. 1 Uge. Blodlegemernes Antal den første Dag 6,875000, 7—8 Dage derefter 3,399000, altsaa en Aftagelse af ca. 50 pCt.

Forsøg 4. Blod opbevaret i 2½ Uge; Blodlegemernes Antal den første Dag 6,413000, 18 Dage derefter 4,202000, altsaa en Aftagelse af omtrent 34 pCt.

Forsøg 5. Blod opbevaret i 2½ Uge; første Dag 4,719000, 18 Dage derefter 3,410000, altsaa en Aftagelse af ca. 28 pCt.

Forsøg 6 (Fortsættelse af Forsøg 1). Blod opbevaret i ca. 3½ Uge; første Dag 9,218000, 23 Dage derefter 3,344000, altsaa en Aftagelse af 64 pCt.

Forsøg 7 (Fortsættelse af Forsøg 2). Blod opbevaret i 4 Uger; første Dag 6,402000, 27 Dage derefter blot 550000—572000, altsaa en Aftagelse af omtrent 91 pCt.

I flere andre Prøver var efter 4 Uger samtlige Blodlegemer utydelige.

Man ser heraf, at Blodlegemernes Antal efter nogle Dages Opbevaring raskt aftager, selv om Blodet opbevares paa et koldt Sted. Dette er ikke Tilfældet med Blodets Farvekraft; denne vedligeholdes sig endog i Maaneder næsten uforandret, og kan derfor selv gammelt Blod anvendes til Farvekraftbestemmelser, medens det for Blodtællingernes Vedkommende maa opstilles som Regel, at Blodet helst tælles den samme Dag eller senest den følgende Dag, og bør det isaafald opbevares paa et koldt Sted.

3. Er Blodets Rigdom paa Blodlegemer meget forskjellig i de forskellige Partier af Cirkulationsapparatet?

Det er tydeligvis af stor Betydning at komme til nogen Kundskab om Forskjellen i Blodlegemernes Antal i de forskellige Karpvinder.

Efter de faa Undersøgelser, jeg hidtil har anstillet, og som ere for ufuldkomne til, at jeg deraf tør drage almindelige Slutninger, synes det ikke, som om der er nogen væsentlig Forskel paa

Blodlegemernes Antal i de forskjellige Karprovindser. Saaledes har jeg ved i 6 Forsøg hos Hunde at tælle Blodet fra Læben og V. jugularis fundet en Differents (udtrykt i pCt. af Middeltallet) af 3,7 pCt. altsaa en forholdsvis ringe Afvigelse cfr.

Forsøgs Nummer.	Blod fra Læben.	Blod fra Vena jugularis.	Differents udtrykt i pCt. af Middeltallet
	Blodlegem. i 1 Kmm	Blodlegem. i 1 Kmm.	
1 <sup>1)</sup>	10,450000	9,638200	8,1 pCt.
2	5,357000	5,029200	6,3 pCt.
3	6,798000	6,413000	5,8 pCt.
4	6,094000	6,061000	0,5 pCt.
5	7,253400	7,280130	0,4 pCt.
6	5,621000	5,687000	1,2 pCt.

Af disse Tællinger synes at fremgaa, at Antallet af Blodlegemer i Læbeblodet er større end i Vena jugularis, et Forhold, hvorpaa Malassez har gjort opmærksom, og som muligens lader sig forklare ved Fordunstning fra Læbens Slimhinde.

Efter nogle faa Forsøg, jeg har udført, synes der heller ikke at være nogen større Forskjel mellem Blodlegemernes Antal i V. jugul. og A. Carotis; denne Undersøgelse er imidlertid overtaget af min Assistent cand. phil. Hagen, der i sin Tid vil offentliggjøre Resultatet.

En Sammenligning mellem Blodet fra Læben og Øret hos Kaninen har ligeledes kun frembudt uvæsentlige Afvigelser nemlig 1,33 pCt., saa jeg foreløbigen tror mig berettiget til, især naar jeg tager Hensyn til Malassez's<sup>2)</sup> Undersøgelser om Blodlegemernes Antal i forskjellige Karprovindser, at udtale den Formodning, at Blodlegemernes Antal i et stort Antal Karprovindser i det Væsentlige er overensstemmende, og at ialfald Afvigelsen sjelden overstiger 6—7 pCt.

<sup>1)</sup> Blodmængden i dette Tilfælde kunstigen forøget ved Transfusion.

<sup>2)</sup> L. Malassez l. c. S. 34—70.

# OM FORHOLDET IMELLEM BLODLEGEMERNES ANTAL OG BLODETS FARVEKRAFT

AF

JAKOB WORM MÜLLER.

---

Det er et vigtigt Spørgsmaal, om der kan udfindes en bestemt Relation imellem Blodlegemernes Antal og Blodets Farvekraft. Hvis en saadan Relation fandt Sted, vilde man med Lethed af Farvekraften kunne bestemme Blodlegemernes Antal. Idet Welcker antog en saadan bestemt Relation, har han paa dette Grundlag foreslaaet og anvendt følgende Methode til Bestemmelsen af Blodlegemernes Antal.

Af et Blod, hvis Gehalt paa Blodlegemer Welcker havde bestemt ved Tælling, bleve smaa nøiagtigen maalte Portioner fortyndede med forskjellige Vandmængder, og med et vist Kvantum (f. Ex. 10 Kcm.) af de saa erholdte Blandinger — Normalopløsninger — farvedes Papirstrimler af en bestemt Længde og Bredde (den saakaldte Blodflekskala). Vilde han nu bestemme Blodlegemernes Antal i en Blodprøve, saa beredte han sig en Blanding af et Volum af samme med et vist Volum (f. Ex. 20 Vol.) Vand, bredte en bestemt Mængde (f. Ex. 10 Kcm.) af Blandingen ud paa Papirstrimler og undersøgte nu, med hvilken af det med Normalopløsningen farvede Papir sammes Farve stemte overens. Heraf vilde naturligvis Blodlegemernes Antal i denne Blodprøve letteligen kunne udledes, hvis Farvekraften stod i et ligefremt Forhold til Blodlegemernes Antal i Normalblodet.

Denne Welckers Methode at bestemme Blodlegemernes Antal af Farvekraften kan i Høiden kun have Gyldighed for Dyr af samme Art; thi hos de forskjellige Slægter og Arter differere Blodlegemerne i Størrelse, de simpleste Iagttagelser vise tilstrækkeligen, at en stor Forskjel i denne Henseende finder Sted.

Men det er heller ikke sandsynligt, at denne Methode har streng Gyldighed for Blod af samme Art. Vierordt har allerede forlængst yttret Tvivl isaahenseende, og efter Malassez synes denne Feil at være begrundet. Malassez<sup>1)</sup> fandt nemlig hos en ung Pige, der led af Blyforgiftning, en stærkere Farvekraft af Blodet end hos et andet ungt Individ, der led af Bleg-sot, uagtet Blodlegemernes Antal var mindre hos hin end hos denne. Jeg har leilighedsvis gjort flere Erfaringer paa dette Gebet; ihvorvel mine Iagttagelser ikke ere anstillede med alle Kauteler og i Detail, turde de dog have sin Interesse, saalænge der ikke foreligger noget større Material.

Før jeg gaar over til nærmere at belyse Forholdet imellem Blodets Farvekraft og Blodlegemernes Antal, skal jeg korteligen omtale den af mig anvendte Fremgangsmaade ved Farvekraftbestemmelser. Jeg er ved disse Bestemmelser, hvis Methodik væsentligen skyldes Welcker, Heidenhain, (Preyer og Vierordt), efter flere Forsøg i Regelen bleven staaende ved de Modifikationer, som Panum har indført, fordi de have vist sig at være praktiske. Fremgangsmaaden er følgende:

Blodblandingerne iagttages med Fordel i — to<sup>2)</sup> eller flere — Glaskasser med plane Vægge, hvis samtlige Sider ere ca. 15 Cm. høie og 10 Cm. brede. Glaskar af denne Størrelse ere meget at foretrække for smaa, hvor det gjælder at bedømme fine Farvenuancer. De stilles paa et Ark hvidt Papir lige overfor Vinduet, saa at begge Kar faa lige meget Lys. Der

<sup>1)</sup> Malassez „de la numeration des globules rouges du sang“. Adrien Delahaye. Paris 1873. S. 6.

<sup>2)</sup> Jeg har stadigen kun anvendt 2 Glaskasser.

heldes nu i dem lige — nøie afmaalte — Kvanta (f. Ex.  $\frac{1}{2}$  Liter) Vand<sup>1)</sup>; derpaa opsuges Blod af en nøiagtig veiet og med sleben Glasprop tillukket Blodprøveflaske<sup>2)</sup>, der rystes godt før Brugen, med et lidet Glasrør, som paa den ene Ende er udtrukket til et langt smalt Kapillærør. Blodet udblæses i den ene Glaskasse og omrøres med en Glasstav, dette gjentages, indtil en passende Farvetone<sup>3)</sup> er opnaaet, hvorpaa Glasrøret (ved gentagen Opsugning og Udblæsning) skylles ud i Glaskassen; Flasken veies atter, og Vægtsaftagelsen repræsenterer det forbrugte Blodkvantum. Derpaa opsuger man med en lignende Pipette af en anden defibrineret Blodprøve, der ligeledes er indeholdt i en veiet Flaske, et vist Kvantum Blod og lader en saa stor Mængde nedflyde i den anden Glaskasse, at den samme Farvetone næsten ganske nøiagtig er opnaaet som i den første. Naar dette er skeet, bringer man Resten af Blodet, der er indeholdt i Glasrøret, tilbage i Blodprøveflasken, skyller Glasrøret ved gentagen Opsugning og Udblæsning ud i Glaskarret og veier atter Flasken. Vægtsaftagelsen angiver da, hvormeget Blod der var nødvendigt for at frembringe den samme Farvenuance, som det i det første Glaskar indeholdte Blodkvantum.

Methodens Nøiagtighed afhænger væsentligen af de forskellige Individens Evne til at skjelne imellem Nuancer i Farveintensiteten af Rødt; hos Enkelte er denne Evne meget liden, men de fleste ville efter nogen Tids Øvelse, naar man sammenligner forskellige Fortyndingsgrader af et og samme Blod, sjældent begaa større Feil end  $\frac{1}{4}$ —1 pCt. Forholdet stiller sig noget anderledes, naar man sammenligner Blodprøver fra forskellige Individier selv af samme Art f. Ex. Hunde; det viser sig af og til, at det ene Blods Farvetone er noget specifik for-

<sup>1)</sup> Eller fortyndet Kogsalt- eller Glaubersaltopløsning.

<sup>2)</sup> Som indeholder det omhyggeligen filtrerede defibrinerede Blod; cfr. mit Arbeide „Transfusion und Plethora“, Christiania 1875. S. 11.

<sup>3)</sup> Nogle foretrække en lysere, Andre en noget mørkere Farvetone.

skjellig fra det andets, idet den ene Blodblanding f. Ex. har et stærkere Stik i det Gule, Grønne eller Blaa eller indeholder et større eller mindre Antal suspenderede Partikler, saa at det ikke er muligt at faa Vædskerne i begge Kar af ganske den samme Farve. Her kan altsaa ved Bedømmelsen let indsnige sig andre Feil, som man maa kontrollere, naar man har med sammenlignende Bestemmelser af Blodets Farvekraft hos forskellige Individuer at gjøre. For at kunne komme til nærmere Kundskab om de Feil, som jeg maatte begaa under saadanne Omstændigheder, har jeg gjort Kontrolforsøg med Blod fra flere Hunde.

Der foreligger f. Ex. 5 forskellige Blodprøver til Undersøgelse. Hvis man nu, som det hyppigen sker, sammenligner Blodprøve *A* med *B*, *A* med *C*, *A* med *D* og endelig *A* med *E*, med andre Ord, hvis man stedse har det samme Normalblod som Udgangspunkt, vil man naturligvis ikke komme til Kundskab om Feilen; skal dette ske, maa man desforuden sammenligne *B* med *C*, *C* med *D* og *D* med *E*. For paa en praktisk Maade at komme til Kundskab om Feilens mulige Størrelse, har jeg fundet det hensigtsmæssigt at gaa frem paa følgende Maade: først sammenlignes *A* med *B*, derpaa *B* med *C*, saa *C* med *D*, *D* med *E* og endelig *E* med en ny Prøve af *A*. Den Vægtsmængde af *A*, hvormed (et vist Kvantum af) *B* stemmede overens, svarer ialmindelig temmelig nøiagtig til den Vægtsmængde af *A*, der befandtes æquivalent med *E*, cfr. følgende Forsøg:

Forsøg 1. 4 Blodprøver undersøgtes. Til Glaskasse No. 1, der fyldtes med  $\frac{1}{2}$  Liter Vand, sattes 0,369 Gram Blod af Prøve *A*; for at frembringe den samme Farvetone i Glaskasse No. 2, der ligeledes fyldtes med  $\frac{1}{2}$  Liter Vand, udfordredes 0,307 Gram Blod af Prøve *B*; hermed sammenlignedes Prøve *C* i Glaskasse No. 1, der naturligvis først rensedes og fyldtes med  $\frac{1}{2}$  Liter Vand, der udfordredes 0,2474 Gram af Prøve *C*, æquivalent hermed var 0,3474 Gram af *D*, denne

sammenlignedes paa den anden Side med (en ny Prøve af) *A*; af denne behøvedes nu 0,367; ved Begyndelsen af Forsøget anvendtes 0,369 Gram. Afvigelsen var altsaa ringe, kun 0,002 Gr. eller i Procenter udtrykt 0,54 pCt.

Forsøg 2. 4 Blodprøver undersøgte. Der tilsattes af Prøve *A* 0,454 Gram, hermed sammenlignedes *B*, med *B C*, med *C D* og *D* med *A*, nu anvendtes 0,444 Gram. Afvigelsen var altsaa 0,010 eller udtrykt i Procenter 2,2 pCt.

Den største Afvigelse fandt Sted i følgende Forsøg:

Forsøg 3. 4 Blodprøver undersøgte. Til Prøve *A*, sattes 0,3898 Gram Blod, hermed sammenlignedes *B*, med *B C*, med *C D*, med *D A*; nu behøvedes 0,368 Gram af *A*. Different 0,0218 Gram eller udtrykt i Procenter af Middeltallet 5,75 pCt, Af disse og flere lignende Forsøg med Hundeblod turde man være berettiget til at drage den Slutning, at Bestemmelsen af Farvekraften i Neiagtighed ikke staar synderligt tilbage for Bestemmelsen af Blodlegemernes Antal. Sagen stiller sig imidlertid noget anderledes, hvor det gjælder sammenlignende Bestemmelser af Farvekraften af et større Antal Blodprøver. Skulle disse Bestemmelser have Værd, maa de ske samtidigt.<sup>1)</sup> Nu er det ikke stedsø muligt at have et større Antal friske Blodprøver i Beredskab. Man maa ofte opbevare Blodprøver flere Dage, førend Sammenligning kan ske. En saadan Opbevaring har imidlertid efter Welckers og Panums Erfaringer ingen mærkbar Indflydelse paa det defibrinerede Blods Farvekraft. Welcker fandt, at defibrineret Blod, der opbevares i godt tillukkede Flasker, fuldstændigen konserverer sin Farvekraft ikke alene i Uger men ogsaa i Maaneder. Det var derfor ikke nødvendigt at gjøre specielle Kontrollforsøg i saa Henseende;<sup>2)</sup> derimod var det ikke uden Betydning at erholde Oplysning om, hvorvidt den forskjellige Opbevaringsmaade har nogen

<sup>1)</sup> Dette er naturligvis ikke nødvendigt ved Tællingen af Blodlegemer.

<sup>2)</sup> Jeg har imidlertid leilighedsvis udført enkelte Bestemmelser, der havde til Hensigt at kontrollere Blodfarvestoffets Holdbarhed. Herpaa skal jeg ved Slutningen af denne Afhandling komme tilbage i en Anmærkning.

større Indflydelse paa Blodets Farveevne. Til den Ende anstilledes følgende to Forsøgsrækker:

I den første Forsøgsrække sammenlignedes til forskellige Tider Blodprøver<sup>1)</sup>, der opbevaredes under de samme Betingelser (i godt tillukkede Flasker og paa et koldt Sted). Bestemmelserne viste, at det relative Forhold i det Væsentlige bliver uforandret, naar Betingelserne ere de samme, cfr. følgende Forsøg:

1. Opbevaringstiden 1 Uge. I 3 Blodprøver (Prøve 1 25 Dage gl., Prøve 2 6—7 Dage gl., Prøve 3 friskt udtømt) fandtes Forholdet af Farvekraften som 100 : 124,8 : 148; 8 Dage derefter fandtes Forholdet som 100 : 120,2 : 149. Afgangelsen fra det første Forhold var altsaa for Prøve 3 meget liden nemlig ca.  $\frac{1}{4}$  pCt., for Prøve 2 derimod 4,6 pCt.

2. Opbevaringstiden 1 Maaned. I to friskt udtømte Prøver fandtes Forholdet af Farvekraften som 100 : 91, 1 Maaned derefter som 100 : 94. Afgangelsen fra den første Bestemmelse var altsaa 3 pCt.

I den anden Forsøgsrække sammenlignedes Blodprøver, der opbevaredes under forskellige Betingelser. Saaledes har jeg taget to Prøver, der viste den samme Farvekraft, opbevaret den ene paa et koldt, den anden paa et temmelig varmt (ca. 20° C.) Sted og sammenlignet dem efter 14 Dages Tid med hinanden. Farvekraften af Prøve 1, der var opbevaret paa et koldt Sted, forholdt sig nu til Farvekraften af Prøve 2, der var opbevaret paa et varmt Sted og lugtede stærkt, som 100 : 106, med andre Ord, det paa et mere varmt Sted opbevarede Blod, der tydeligvis var mere dekomponeret, havde en større Farvekraft.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> fra Hunde; Blodprøverne vare ikke altid fra samme Datum.

<sup>2)</sup> Hermed stemmer ogsaa Panums Undersøgelser af Farvekraften i Blodblandinger, der opbevaredes i 7 Dage i et varmt Værelse i tillukkede Flasker, overens. — Det mere dekomponerede Blod har stedse en smudsig dunkelblaa Farvenuance, der er til Hinder for Sammenligningen med friskt eller mindre dekomponeret Blod.



Da man nu ved Bestemmelsen af Farvekraften ikke altid har friske Prøver til Disposition, bør man altsaa opbevare samtlige Prøver før Brugen under de samme Betingelser, nemlig paa et koldt Sted og saameget som muligt beskyttet for Luftens Adgang i vel tillukkede Glasflasker.

Med dette for Øie har jeg gjort sammenlignende Bestemmelser af Farvekraften og Blodlegemernes Antal i en Række Blodprøver. Følgende Tabel, der ikke tiltrænger nogen speciel Forklaring, giver en Oversigt over det vundne Resultat:<sup>1)</sup>

---

<sup>1)</sup> Disse Bestemmelser af Farvekraften ere naturligvis ikke udførte samtidigt men igjennem et langt Tidrum til forskjellige Tider, idet fra hver foregaaende Farvekraftbestemmelse mindst to Blodprøver bleve opbevarede, for at der kunde ske en kontinuerlig Sammenligning.

## Tællinger af Blodlegemen

	Prøve 1.	Prøve 2.	Prøve 3.	Prøve 4.	Prøve 5. A
Blodlegemernes Antal i 1 Kubikmillimeter . . . . .	9,638000 <sup>a)</sup>	9,207000 <sup>a)</sup>	8,096000	7,706600	7,279600
De til lige Farvning af $\frac{1}{4}$ Liter Vand forbrugte Blodkvanta i Gram . . . . .	0,2783	0,3035	0,3732	0,3932	0,3724
Forholdet imellem Blodlegemernes Antal (Prøve 5 <sup>1)</sup> sat lig 100) . . . . .	132,4	126,5	111,2	105,9	100
Forholdet imellem Farvekraften (Prøve 5 sat lig 100) . . .	183,8	122,7	99,8	94,7	100
Differentserne imellem disse Forhold udtrykt i pCt. af deres Middeltal . . . . .	1,1 pCt.	3 pCt.	10,8 pCt.	11,2 pCt.	0 pCt.

<sup>a)</sup> Prøve 5 dannede Udgangspunktet for Undersøgelsen.

<sup>a)</sup> Blodlegemernes Antal kunstigen forøget ved Transfusion.

Differentsten af Forholdet imellem Blodlegemernes Antal og Forholdet imellem større end 7 pCt., bliver Differentsernes Middeltal i de øvrige Prøver 3,3 pCt. (i Pr

I Henhold til disse Forsøg kan det vel neppe være tvivlsomt, at hos et ikke ringe Antal Individuer af samme Art Farvekraften tilnærmelsesvis staar i et ligefremt Forhold til Blodlegemernes Antal. Men forelægger man sig nu det Spørgsmaal, om de Prøver, hvori Differentsten var betydelig, strengt bevise, at en større Afvigelse hyppigen eller maaske som Regel finder Sted, bliver Svaret benægtende. Materialet er for ufuldkomment til at kunne give fyldestgørende Oplysninger i saa Henseende.

For det Første ere saavel Farvekraftsbestemmelserne som Tællingerne af Blodlegemerne i sin Almindelighed behæftede med Feil, for det Andet er, som jeg allerede i min forrige Afhandling<sup>1)</sup> har gjort opmærksom paa, Tællingen af Blodlegemerne i det defibrinerede Blod forbunden med saamange Kom-

<sup>1)</sup> Cfr. min Afhandling „Om Tællingen af de røde Blodlegemer efter Malassez's Methode“ i dette Archiv.

### Resultater af Farvekraften.

Prøve 8.	Prøve 9.	Prøve 10.	Prøve 11.	Prøve 12.	Prøve 13.	Prøve 14.	Prøve 15.
6,402000	6,375600	5,977400	5,506600	5,029200	4,994000	4,835600	4,719000
0,436	0,40932	0,4253	0,4589	0,5057	0,5348	0,5444	0,5825
87,9	87,6	82,1	75,6	69,1	68,6	66,4	64,8
85,4	91	87,6	81,2	73,6	69,6	68,4	63,9
2,9 pCt.	3,8 pCt.	6,5 pCt.	7,1 pCt.	6,3 pCt.	1,4 pCt.	3 pCt.	1,4 pCt.

er altså i Gjennemsnit 5,6 pCt., og trækkes de 4 Prøver fra, hvori Differensen var (Differensen kun ca. 1 pCt.).

plikationer, at jeg endog ved enkelte af disse Prøver har maattet tage Tællinger af ikke defibrineret Blod (ved Indstik fra Dyrets Læbe) til Hjælp, og for det Tredie bleve Blodlegemerne i det defibrinerede Blod ikke stedse tællede den samme men den følgende Dag. At dette sidste Moment ikke kan lades ud af Betragtning, fremlyser af min forrige Afhandling, hvori jeg har søgt at vise, at allerede efter 3 Dages Forløb ikke sjældent et mærkbart Antal Blodlegemer er gaaet tilgrunde. Heraf kan man muligens forklare de store Afvigelser i følgende Forsøg, i hvilke Blodlegemerne først bleve tællede ca. 2 Døgn efter Udtømmelsen:

	Prøve 5.	Prøve 16.	Prøve 17.
Blodlegemernes Antal i 1 Kubikmillimeter .	7,279800	5,797000	4,400000
De til lige Farvning af $\frac{1}{4}$ Liter Vand forbrugte Blodkvanta i Gram . . . . .	0,3724	0,3997	0,5218
Forholdet imellem Blodlegemernes Antal (Prøve 5 sat lig 100) . . . . .	100	79,6	60,4
Forholdet imellem Farvekraften (Prøve 5 sat lig 100) . . . . .	100	93,2	71,4
Differentserne imellem disse Forhold udtrykte i pCt. af deres Middeltal . . . . .	0 pCt.	15,7 pCt.	16,8 pCt.

Rigtignok kan denne store Afvigelse af 16—17 pCt. til Fordel for Farvekraften muligens hidrøre derfra, at Blodlegemerne hos disse Hunde, der vare kraftige og velnærede, indeholdt en forholdsvis større Mængde Hæmoglobin, men da det defibrinerede Blod først blev tællt et Par Dage efter Udtømmelsen, er det foreløbigen rimeligere at antage, at endel Blodlegemer under Opbevaringstiden vare gaaede tilgrunde.

En streng Kritik af de foreliggende Forsøg viser altsaa, at den Welcker'ske Forudsætning, at Farvekraften hos Individet af samme Art staar i et ligefremt Forhold til Blodlegemernes Antal, ialfald i et vist Antal Tilfælde tilnærmelsesvis har sin Rigtighed, med andre Ord, at Blodlegemerne ialfald hos et vist Antal Individet af samme Art indeholder omtrent den samme Mængde Blodfarvestof (Hæmoglobin); det er sandsynligt, at mange Undtagelser finde Sted, men vi have ingenlunde godtgjort dette og endnu mindre formaaet at belyse, hvoraf saadanne Undtagelser, naar de ikke ere begrundede i Forsøgsfeil, kunne være betingede. Paabegyndte Sammenligninger af Farvekraften med Blodlegemernes Antal hos andre Arter synes at vise, at ogsaa her Uoverensstemmelser finde Sted, men da det paa Grund af min specielle Erfaring og den lette Adgang til stadigen at erholde friskt Hundeblood syntes mig af fortrinsvis Vigtighed først at komme til Kundskab om, hvor vidt større Uoverensstemmelser imellem Farvekraft og Blodlegemernes

Antal finde Sted hos Hunde og hvoraf disse betinges, har jeg fundet det rigtigt med alle Kauteler at lade anstille et større Antal nye Forsøg udelukkende med Hundeblood, som i sin Tid ville blive offentliggjorte.

Forholdet imellem Blodlegemernes Antal og Farvekraften førte mig til et nøiagtigere Studium af Forholdet imellem Farvekraften og Vægten af de saakaldte tørre Blodlegemer bestemt efter Becquerel-Rodier eller Scherer.

Nogle af mine Blodanalyser have givet lignende Overensstemmelse mellem Blodets Farvekraft og Vægten af de tørre Blodlegemer, som den Prof. Panum har fundet, men en Række fortsatte Undersøgelser have vist mig med fuldstændig Sikkerhed, at Uoverensstemmelserne ikke sjældent ere meget store, og at Forholdet imellem Blodlegemernes Antal og Vægten af de tørre Blodlegemer viser meget større Afvigelser end Forholdet imellem Blodets Farvekraft og Blodlegemernes Antal. De specielle Resultater vil Herr Cand. phil. Hagen meddele i en særskilt Afhandling.

Anm. For mere exact at kunne bedømme Holdbarheden af det defibrinerede Blods Farvekraft, har jeg tællt Blodlegemernes Antal i en Blodprøve, opbevaret den paa et koldt Sted i en vel tillukket Flaske og efter nogen Tids Forløb sammenlignet dens Farvekraft med en frisk Prøve fra samme Dyr, i hvilken Blodlegemerne ligeledes vare tællede. Overensstemmelsen har i de faa Forsøg, jeg hidtil har udført, været tilfredsstillende. Da Sammenligningen skede, var en stor Mængde Blodlegemer i den gamle Blodprøve gaaet tilgrunde, saa at deslige Bestemmelser til Overflod kunne tjene til Illustration af det bekjendte Faktum, at Blodlegemernes Destruktion i og for sig ikke forårsager nogen væsentlig Forandring i Blodets Farvekraft.

---

# THEORIE DER TRANSFORMATIONS-GRUPPEN.

(ABHANDLUNG II)

VON

SOPHUS LIE.

## Abschnitt II.

In meiner ersten Abhandlung über Transformations-Gruppen bestimmte ich alle Gruppen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. In dieser zweiten Abhandlung beschäftige ich mich mit der allgemeinen Theorie der Transformations-Gruppen einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit, und entwickle die wichtigsten für alle Dimensionen geltenden Sätze, die ich bis jetzt gefunden habe.

In meiner dritten Abhandlung werde ich darnach die allgemeine Bestimmung aller Transformations-Gruppen einer *zweifach* ausgedehnten Mannigfaltigkeit, die ich schon längst glücklich durchgeführt habe, in Angriff nehmen. Da indess diese Theorie äusserst viele, wenn auch grösstentheils einfache Rechnungen verlangt, werde ich sie nur successiv in einer Reihe Abhandlungen darstellen können.

Zur Zeit beschäftige ich mich mit der allgemeinen Bestimmung aller Transformations-Gruppen einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, und hege die Hoffnung, dass es mir gelingen wird, auch diese äusserst complicirte Bestim-

nung, die mir allerdings gar keine principielle Schwierigkeiten bietet, durchzuführen. Weitere Abhandlungen werden sodann einerseits die allgemeine Theorie einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit behandeln, andererseits im Anschlusse zu den dargestellten Theorien neue Gesichtspunkte für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen entwickeln.

## § 1.

**Allgemeine Begriffe.**

Fasst man in den Gleichungen

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)$$

die Grössen  $x_1' \dots x_n'$  als ursprüngliche Variabeln, die Grössen  $x_1 \dots x_n$  als neue Variabeln, und endlich  $a_1 \dots a_r$  als Parameter auf, so definiren diese Gleichungen  $r$ -fach unendlich viele Transformationen. Ich sage, dass eine solche Schaar von Transformationen eine Gruppe bilden, wenn die Succession zweier Transformationen der Schaar mit einer einzigen Transformation derselben Schaar äquivalent ist; wenn also aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r) \\ x_1'' &= f_1(x_1' \dots x_n' b_1 \dots b_r) \end{aligned}$$

folgt

$$x_1'' = f_1(x_1 \dots x_n c_1 \dots c_r),$$

wo die Grössen  $c_1 \dots c_r$  nur von den  $a$  und  $b$  abhängen. Diese Definition lässt sich auch folgendermassen formuliren.

*Def. Die  $n$  Gleichungen*

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r) = f_1(a)$$

*bestimmen eine Transformations-Gruppe, wenn für jedes  $i$  eine Relation der Form*

$$f_i(f_1(a) \dots f_n(a) b_1 \dots b_r) = f_i(x_1 \dots x_n c_1 \dots c_r)$$

*stattfindet; dabei vorausgesetzt, dass  $c_1 \dots c_r$  gewisse Funktionen der  $a$  und  $b$  sind, die von der Zahl  $i$  unabhängig sind.*

Führt man in die Gleichungen einer Transformations-Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_r)$$

statt  $\alpha_1 \dots \alpha_r$  gewisse Funktionen dieser Größen, etwa  $\alpha_1 \dots \alpha_r$  als neue Parameter ein, so bestimmen die somit erhaltenen Gleichungen

$$x_i' = \varphi_i(x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_r)$$

eo ipso wiederum eine Transformations-Gruppe, die als mit der ursprünglichen äquivalent aufgefasst werden soll. Hierbei kann es gelegentlich eintreffen, dass die neuen Gleichungen eine geringere Anzahl Parameter als die ursprünglichen enthalten. Eine solche Erniedrigung in der Zahl der Parameter ist möglich, wenn  $f_1 \dots f_n$ , aufgefasst als Funktionen der  $\alpha$  gemeinsame Lösungen einer (oder mehrerer) linearen partiellen Differential-Gleichung der Form

$$\sum_k \psi_k(\alpha_1 \dots \alpha_r) \frac{d\alpha_k}{d\alpha_k} = 0$$

sind; befriedigen in der That alle  $f$  dieser Gleichung, so ist es, wenn wir mit  $\alpha_1 \dots \alpha_{r-1}$  ein System Lösungen bezeichnen, die nur von den  $\alpha$  abhängen, immer möglich die  $f_i$  auf die Form

$$f_i(x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_r) = \varphi_i(x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_{r-1})$$

zu bringen. Für jede Transformations-Gruppe gibt es offenbar eine gewisse Minimums-Zahl der Parameter. Ist diese Zahl gleich  $r$ , sagen wir aus Gründen, die sich später ergeben, dass die Gruppe *r-gliedrig* ist.

*Definition. Eine Transformations-Gruppe heisst r-gliedrig, wenn sie  $\infty^r$  distinkte Transformationen enthält.*

Bestimmen die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_r)$$

eine Transformations-Gruppe, und führt man statt  $x_1 \dots x_n$  neue Variablen  $y_1 \dots y_n$  ein, vermöge der Gleichungen

$$x_k = \Theta_k(y_1 \dots y_n) = \Theta_k,$$

so ist es unmittelbar evident, dass auch die Gleichungen

$$\Theta_i(y_1' \dots y_n') = f_i(\Theta_1 \dots \Theta_n \alpha_1 \dots \alpha_r)$$

eine Transformations-Gruppe bestimmen; denn die neuen und



die alten Gleichungen bestimmen identisch dieselben Transformationen zwischen den  $x$ . Zwei solche Gruppen sollen *ähnlich* genannt werden.

*Def. Zwei  $r$ -gliedrige Transformations-Gruppen*

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)$$

$$y_i' = \varphi_i(y_1 \dots y_n a_1 \dots a_r)$$

*heissen ähnlich, wenn die eine Gruppe in die andere durch Einführung neuer Variabeln umgewandelt werden kann.*

Ich kann nun das Haupt-Problem, dessen allgemeine Erledigung das Ziel meiner Bestrebungen ist, formuliren:

*Problem. Bestimm alle  $r$ -gliedrige Gruppen von Transformationen zwischen  $n$  Variabeln.*

Es ist nach dem Vorangehenden einleuchtend, dass es bei der Behandlung dieses Problems erlaubt und zugleich zweckmässig ist, ähnliche Gruppen als identisch aufzufassen.

## § 2.

### Infinitesimale Transformationen.

Im Folgenden werden wir erkennen, dass jede  $r$ -gliedrige Gruppe  $\infty^{r-1}$  infinitesimale Transformationen enthält, die für die Gruppe charakteristisch sind. Die einzige oder jedenfalls die einfachste Untersuchungs-Weise einer Gruppe besteht darin, dass man die infinitesimalen Transformationen derselben zu Untersuchungs-Gegenstand macht. Daher schicken wir schon hier einige allgemeine Betrachtungen über infinitesimale Transformationen voraus.

Eine Transformation heisst infinitesimal, wenn sie die Form

$$x_i' = x_i + \delta t \cdot X_i(x_1 \dots x_n)$$

erhalten kann, und dabei  $\delta t$  eine infinitesimale Grösse bezeichnet. Wir schreiben im Allgemeinen die letzten Gleichungen folgendermassen

$$(1) \quad \delta x_i = \delta t \cdot X_i(x_1 \dots x_n).$$

Führt man statt  $x_1, \dots, x_n$  neue Variabeln etwa  $y_1, \dots, y_n$  ein, so nimmt unsere infinitesimale Transformation die Form

$$\delta y_i = \delta t \sum_k \frac{dy_i}{dx_k} X_k$$

an.

Führen wir andererseits dieselbe Variablen-Änderung in dem Ausdrucke

$$(2) \quad AF = X_1 \frac{dF}{dx_1} + \dots + X_n \frac{dF}{dx_n},$$

aus, so kommt

$$AF' = \frac{dF}{dy_1} \sum_k \frac{dy_1}{dx_k} X_k + \dots + \frac{dF}{dy_n} \sum_k \frac{dy_n}{dx_k} X_k.$$

Wir sehen also, dass die Gleichungen der infinitesimalen Transformation und der Ausdruck  $AF$  sich in ganz entsprechender Weise transformiren. In Folge dessen ist es analytisch erlaubt, den Ausdruck  $AF$  als Symbol unserer infinitesimalen Transformation aufzufassen.

Sind

$$AF = X_1 \frac{dF}{dx_1} + \dots + X_n \frac{dF}{dx_n}$$

$$BF = Y_1 \frac{dF}{dx_1} + \dots + Y_n \frac{dF}{dx_n}$$

zwei infinitesimale Transformationen, und sind  $A'F$  und  $B'F$  diejenigen Ausdrücke, in welche bez.  $AF$  und  $BF$  übergehen, wenn man  $y_1, \dots, y_n$  als neue Variabeln statt  $x_1, \dots, x_n$  einführt, so ist eo ipso, welche auch die Funktion  $\Omega$  sein mag,

$$A\Omega = A'\Omega, \quad B\Omega = B'\Omega.$$

Anwenden wir nun successiv diese beide Gleichungen, so kommt einerseits

$$B(A(F)) = B'(A'(F)),$$

andererseits

$$A(B(F)) = A'(B'(F))$$

und durch Subtraction folgt die fundamentale Identität

$A(B(F)) - B(A(F)) = A'(B'(F)) - B'(A'(F))$   
 die im Folgenden eine wichtige Rolle spielt<sup>1)</sup>.

Ich setze nun voraus, dass eine gewisse Transformations-Gruppe diese beiden inf. Transformationen enthält, deren Symbole bez.  $AF$  und  $BF$  sind. Alsdann soll unsere Gruppe auch diejenige Transformation enthalten, die mit ihrer Succession aequivalent ist; das heisst, sie enthält die infinitesimale Transformation

$$\delta x_1 = \omega_1 X_1 + \omega_2 Y_1,$$

in welcher  $\omega_1$  und  $\omega_2$  infinitesimale Grössen bezeichnen, deren Verhältniss eine arbiträre Constante ist. Also

*Satz 1. Gehören die beiden infinitesimalen Transformationen  $AF$  und  $BF$  einer gewissen Gruppe an, so ist dasselbe der Fall mit den unendlich vielen infinitesimalen Transformationen, die durch das gemeinsame Symbol  $\lambda AF + \mu BF$  dargestellt werden, wenn  $\lambda$  und  $\mu$  Constanten bezeichnen.*

Wir sagen, dass  $r$  infinitesimale Transformationen

$$A_1 F \dots A_r F$$

von einander unabhängig sind, wenn keine lineare Relation

$$\lambda_1 A_1 F + \dots + \lambda_r A_r F = 0$$

mit constanten Coefficienten stattfindet.

Endlich können wir auch den folgenden Satz, dessen Beweis in dem Vorangehenden liegt, aussprechen:

*Satz 2. Sind*

$$A_1 F \dots A_r F$$

*$r$  von einander unabhängige infinitesimale Transformationen*

<sup>1)</sup> In meiner Abhandlung: Allgemeine Theorie der partiellen Differential-Gleichungen (Math. Annalen, Bd IX) habe ich einen anderen mehr umständlichen Beweis dieses Satzes geliefert. Zu erinnern ist, wie man durch Ausführung findet, dass

$$A(B(F)) - B(A(F)) = \sum_i \sum_k \left( X_k \frac{dY_i}{dx_k} - Y_k \frac{dX_i}{dx_k} \right) \frac{dF}{dx_i}$$

ist.

einer Gruppe, so gehören die  $\infty^{r-1}$  infinitesimalen Transformationen, die durch

$$\lambda_1 A_1 F + \dots + \lambda_r A_r F$$

repräsentirt werden, wenn  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  Parameter sind, derselben Gruppe an.

### § 3.

#### Allgemeine Sätze über Transformations-Gruppen.

Bestimmen die  $n$  Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n b_1 \dots b_r) = f_i(b)$$

eine  $r$ -gliedrige Gruppe, und besteht also eine Funktional-Relation der Form

$$(3) \quad f_1(f_1(b) \dots f_n(b) a_1 \dots a_r) = f_1(x_1 \dots x_n \varphi_1 \dots \varphi_r)$$

wo

$$\varphi_k = \varphi_k(a_1 \dots a_r b_1 \dots b_r)$$

ist, so darf keine Relation zwischen den  $\varphi$  und  $b$  stattfinden.

Bestände nämlich eine solche, etwa

$$\varphi_r = W(b_1 \dots b_r \varphi_1 \dots \varphi_{r-1})$$

so würde (3) die Form

$$f_1(f_1(b) \dots f_n(b) a_1 \dots a_r) = F_1(x_1 \dots x_n b_1 \dots b_r \varphi_1 \dots \varphi_{r-1})$$

annehmen, woraus durch Differentiation hinsichtlich  $a_k$

$$\frac{d f_1(f_1 \dots f_n a_1 \dots a_r)}{d a_k} = \sum_{s=1}^{s=r-1} \frac{d F_1}{d \varphi_s} \frac{d \varphi_s}{d a_k}$$

und durch Elimination der  $(r-1)$  Differential-Quotienten von  $F_1$  hinsichtlich  $\varphi_1 \dots \varphi_{r-1}$  käme endlich eine lineare Gleichung der Form

$$\sum_k \psi_k(a_1 \dots a_r) \frac{d f_1(f_1 \dots f_n a_1 \dots a_r)}{d a_k} = 0$$

oder wenn man will:

$$\sum_k \psi_k(a_1 \dots a_r) \frac{d f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)}{d a_k} = 0$$

wobei zu bemerken wäre, dass die Funktionen  $\psi_k$  von der Zahl  $i$  völlig unabhängig waren. Da aber unsere Gruppe nach Voraussetzung  $r$ -gliedrig ist, so dürfen die Grössen

$$f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)$$

nicht gemeinsame Lösungen einer solchen linearen partiellen Differential-Gleichung sein, und also ist hiermit bewiesen, dass eine Relation zwischen den  $\varphi$  und  $b$  nicht stattfinden kann. Hiermit ist eo ipso erwiesen, dass auch nicht mehrere solche Relationen stattfinden können. Also

**Satz 3.** *Bestimmen die Gleichungen*

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)$$

*eine  $r$ -gliedrige Transformations-Gruppe und ist also die Succession der beiden Transformationen*

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n b_1 \dots b_r)$$

$$x_1'' = f_1(x_1' \dots x_n' a_1 \dots a_r)$$

*äquivalent mit der Transformation*

$$x_1'' = f_1(x_1 \dots x_n \varphi_1 \dots \varphi_r),$$

*wo die  $\varphi$  nur von den  $a$  und  $b$  abhängen, so kann man immer die  $a$  derart wählen, dass die  $\varphi$  gleich beliebig gegebenen Functionen der  $b$  werden.*

Insbesondere können wir

$$\varphi_k(a_1 \dots a_r b_1 \dots b_r) = b_k$$

setzen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe der  $a$  bez. mit  $a_1^0 \dots a_r^0$ , so kommt

$$f_1(f_1(b) \dots f_n(b) a_1^0 \dots a_r^0) = f_1(x_1 \dots x_n b_1 \dots b_r)$$

und also auch

$$f_1(x_1 \dots x_n a_1^0 \dots a_r^0) = x_1,$$

wo  $a_1^0 \dots a_r^0$  offenbar von den  $b$  unabhängig sind. Folglich bestimmen die Gleichungen

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a_1^0 \dots a_r^0)$$

eine identische Transformation. Dies giebt

**Satz 4.** *Jede Transformations-Gruppe enthält eine identische Transformation.*

Ferner können wir

$$\varphi_k(a_1 \dots a_r b_1 \dots b_r) = a_k^0$$

setzen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe der  $a$ , die von den  $b$  abhängen, bez. mit  $\beta_1 \dots \beta_r$ , so kommt

$$f_1(f_1(b) \dots f_n(b) \beta_1 \dots \beta_r) = f_1(x_1 \dots x_n a_1^0 \dots a_r^0) = x_1.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Succession der beiden Transformationen

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n b_1 \dots b_r)$$

und

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n \beta_1 \dots \beta_r)$$

mit der identischen Transformation der Gruppe äquivalent ist, dass also jene beiden Transformationen sich aufheben:

**Satz 5.** *Enthält eine Transformations-Gruppe eine gewisse Transformation, so enthält sie auch die inverse Transformation.*

Oder analytisch ausgesprochen:

**Satz 6.** *Werden die Gleichungen der Gruppe*

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)$$

*hinsichtlich der  $x_1$  aufgelöst, so findet man*

$$x_1 = f_1(x_1' \dots x_n' a_1 \dots a_r)$$

*wo die  $a$  Funktionen der  $a$  sind.*

Wüsste man a priori, dass die Funktionen  $f_i$  für  $a_1 = a_1^0 \dots a_r = a_r^0$ , eine continuirliche Funktion der  $a$  wäre, so könnte man den Ausdruck

$$f_1(x_1 \dots x_n a_1 + \omega_1 \dots a_r + \omega_r)$$

wo die  $\omega$  unabhängige infinitesimale Grössen bezeichnen, auf die Form

$$f_1(x_1 \dots x_n a_1^0 \dots a_r^0) + \sum_k \omega_k \left[ \frac{df_1}{da_k} \right]_{(a_s = a_s^0)}$$

bringen. Und dann liesse sich schliessen, dass unsere Gruppe  $\infty^{r-1}$  infinitesimale Transformationen:

$$\delta x_1 = \sum_k \omega_k \left[ \frac{df_1}{da_k} \right]_{(a_s = a_s^0)}$$

enthielte; wobei allerdings noch denkbar wäre, dass diese infinitesimalen Transformationen nichtsämmtlich distinkt waren.

Um in stringenter Weise nachzuweisen, dass wirklich jede  $r$ -gliedrige Gruppe  $\infty^{r-1}$  infinitesimale Transformationen enthält, verfährt man am besten folgendermassen: Brauchen wir  $\beta_1 \dots \beta_r, \omega_1 \dots \omega_r$  in derselben Bedeutung wie soeben, so kann der Ausdruck

$$f_i(f_1(b) \dots f_n(b) \beta_1 + \omega_1 \dots \beta_r + \omega_r))$$

für allgemeine Werthe der  $b$  oder was auf dasselbe hinauskommt, für allgemeine Werthe der  $\beta$  auf die Form

$$f_i(f_1(b) \dots f_n(b) \beta_1 \dots \beta_r) + \sum \omega_k Y_{ik}$$

gebracht werden, wo die Grössen

$$Y_{ik} = \left[ \frac{d f_i(f_1(b) \dots f_n(b) a_1 \dots a_r)}{d a_k} \right]_{(a_s = \beta_s)}$$

nach der Substitution  $a_s = \beta_s$  allein von den  $x$  und  $b$  abhängen. In dieser Weise ergibt sich, dass unsere Gruppe die infinitesimalen Transformationen

$$\delta x_i = \sum_k \omega_k Y_{ik} \quad (4)$$

enthält. Wir werden zeigen, dass die letzte Gleichung je nach den relativen Werthen der infinitesimalen Grössen  $\omega_1 \dots \omega_r \propto^{r-1}$  infinitesimale Transformationen darstellt. Existirte in der That für jedes  $i$  eine Relation der Form

$$\sum_k \psi_k(b_1 \dots b_r) Y_{ik} = 0,$$

wo die Funktionen  $\psi_k$  von der Zahl  $i$  unabhängig waren, so könnte man sie, indem man  $f_1(b) \dots f_n(b) \beta_1 \dots \beta_r$  als unabhängige Variablen anstatt  $x_1 \dots x_n b_1 \dots b_r$  einführte, auf die Form

$$\sum_k w_k(\beta_1 \dots \beta_r) \frac{d f_i(f_1(b) \dots f_n(b) \beta_1 \dots \beta_r)}{d \beta_k} = 0$$

bringen, woraus wieder

$$\sum_k w_k(a_1 \dots a_r) \frac{d f_i(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)}{d a_k} = 0$$

folgen würde.

Da nun aber unsere Gruppe nach Voraussetzung  $r$ -gliedrig ist, so können die  $f_i$  nicht gemeinsame Lösungen einer solchen linearen partiellen Differential-Gleichung sein, und folglich sind die oben gefundenen  $\propto^{r-1}$  infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe sämmtlich distinkt. Dies giebt

**Satz 7.** *Jede  $r$ -gliedrige Gruppe enthält  $\propto^{r-1}$  infinitesimale Transformationen.*

<sup>1)</sup> Wie früher schreiben wir  $f_k(b)$  statt  $f_k(x_1 \dots x_n b_1 \dots b_n)$ .

Jetzt führe ich zuerst eine endliche Transformation

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r).$$

der Gruppe aus, sodann eine beliebige unter den zugehörigen infinitesimalen, etwa die folgende

$$\delta x_1 = X_1(x_1 \dots x_n) \delta t$$

aus. Die mit dieser Succession äquivalente Transformation

$$x_1'' = f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r) + X_1(x_1' \dots x_n') \delta t$$

gehört, wissen wir, der Gruppe an und kann daher die Form

$$x_1'' = f_1(x_1 \dots x_n a_1 + da_1 \dots a_r + da_r)$$

erhalten. Und da  $f$  nur für Ausnahmcs-Werthe der  $a$  discontinuirlich sein kann, folgt

$$X_1(x_1' \dots x_n') \delta t = \sum_k \frac{df_1}{da_k} da_k,$$

und durch Division mit  $\delta t$ , indem man erinnert, dass die Differential-Quotienten

$$\frac{da_k}{dt}$$

als unabhängig von  $x_1$ , Functionen der  $a$  sind, kommt eine Gleichung der Form

$$X_1(x_1' \dots x_n') = \sum_k \psi_k(a_1 \dots a_r) \frac{df_1}{da_k}$$

oder durch Einführung der  $f_1$  statt der  $x_1'$

$$X_1(f_1 \dots f_n) = \sum_k \psi_k(a_1 \dots a_r) \frac{df_1}{da_k},$$

womit folgender Satz erwiesen ist.

*Satz 8. Enthält die Gruppe*

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)$$

*die infinitesimale Transformation  $\delta x_1 = X_1(x_1 \dots x_n) \delta t$ , so bestehen Gleichungen der Form*

$$X_1(f_1 \dots f_n) = \sum_k \psi_k(a_1 \dots a_r) \frac{df_1}{da_k} = 0,$$

*wo die Functionen  $\psi_k$  von der Zahl  $i$  unabhängig sind.*



§ 4.

**Nothwendige Beziehungen zwischen den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe.**

Seien

$$\delta x_1 = X_{11} \omega_1, \delta x_2 = X_{21} \omega_1 \dots \delta x_r = X_{r1} \omega_1$$

$r$  von einander unabhängige infinitesimale Transformationen einer  $r$ -gliedrigen Gruppe. Wir werden gewisse wichtige Relationen, die zwischen den  $X_{ik}$  stattfinden, entwickeln.

Anwenden wir successiv zwei unter diesen infinitesimalen Transformationen, so soll diese Succession mit einer einzigen und offenbar infinitesimalen Transformation der Gruppe äquivalent sein. Und zwar muss diese Äquivalenz noch bestehen, wenn wir infinitesimale Grössen zweiter Ordnung berücksichtigen. Indem wir diese Forderung für zwei beliebige unter den obenstehenden infinitesimalen Transformationen, etwa für die beiden ersten ausdrücken, finden wir die besprochenen Relationen.

Berücksichtigen wir infinitesimale Grössen zweiter Ordnung, so nehmen die beiden ersten inf. Transformationen bez. die Form an

$$x_1' = x_1 + \omega_1 X_{11} + \frac{\omega_1^2}{2} \sum_k \frac{dX_{11}}{dx_k} X_{1k}$$

und

$$x_1'' = x_1 + \omega_2 X_{21} + \frac{\omega_2^2}{2} \sum_k \frac{dX_{21}}{dx_k} X_{2k}.$$

Anwenden wir nun successiv diese beiden Transformationen, so ist diese Succession eo ipso äquivalent mit der folgenden Transformation

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1 + \omega_1 X_{11} + \frac{1}{2} \omega_1^2 \sum_k \frac{dX_{11}}{dx_k} X_{1k} \\ &+ \omega_2 [X_{21} + \omega_1 \sum_k \frac{dX_{21}}{dx_k} X_{1k}] \\ &+ \frac{1}{2} \omega_2^2 \sum_k \frac{dX_{21}}{dx_k} X_{2k}. \end{aligned}$$

Und es soll ausgedrückt werden, dass die letztgeschriebene Transformation mit Berücksichtigung von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung die Form

$$x_1'' = x_1 + \lambda_1 X_{11} + \lambda_2 X_{21} + \dots + \lambda_r X_{r1}$$

oder ausgeführt

$$x_1'' = x_1 + \sum_k \lambda_k X_{k1} + \sum_k \frac{d(\lambda_1 X_{11} + \dots + \lambda_r X_{r1})}{dx_k} (\lambda_1 X_{1k} + \dots + \lambda_r X_{rk})$$

besitzt.

Sollen die beiden Ausdrücke für  $x_1''$  hinsichtlich infinitesimaler Grössen erster Ordnung übereinstimmen, so muss zunächst

$$\omega_1 X_{11} + \omega_2 X_{21} = \lambda_1 X_{11} + \dots + \lambda_r X_{r1} + \sigma^2$$

sein, wobei  $\sigma^2$  eine infinitesimale Grösse zweiter Ordnung bezeichnet. Also folgt

$$\lambda_1 = \omega_1 + w_1^2, \lambda_2 = \omega_2 + w_2^2, \lambda_3 = w_3^2 \dots \lambda_r = w_r^2,$$

wo alle  $w_i^2$  infinitesimale Grössen zweiter Ordnung bezeichnen.

Verlangen wir nun ferner, dass die beiden Ausdrücke für  $x_1''$  auch hinsichtlich infinitesimaler Grössen zweiter Ordnung übereinstimmen sollen, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_1^2 \sum_k \frac{dX_{11}}{dx_k} X_{1k} + \omega_1 \omega_2 \sum_k \frac{dX_{21}}{dx_k} X_{1k} + \frac{1}{2} \omega_2^2 \sum_k \frac{dX_{21}}{dx_k} X_{2k} \\ - \sum_k w_k^2 X_{k1} + \frac{1}{2} \sum_k \frac{d(\omega_1 X_{11} + \omega_2 X_{21})}{dx_k} (\omega_1 X_{1k} + \omega_2 X_{2k}) \end{aligned}$$

und wenn wir die sich aufhebenden Glieder weglassen:

$$\frac{1}{2} \omega_1 \omega_2 \sum_k \left( \frac{dX_{21}}{dx_k} X_{1k} - \frac{dX_{11}}{dx_k} X_{2k} \right) = \sum_k w_k^2 X_{k1}.$$

Dividiren wir endlich mit  $\frac{1}{2} \omega_1 \omega_2$  und setzen darnach

$$2 \frac{w_k^2}{\omega_1 \omega_2} = c_k$$

so kommt

$$\sum_k \left( \frac{dX_{21}}{dx_k} X_{1k} - \frac{dX_{11}}{dx_k} X_{2k} \right) = \sum_k c_k X_{k1}$$

wo die Grössen  $c_k$ , die von den  $x$  unabhängig sind, absolute

Constanten sein müssen. Zu bemerken ist dabei, dass sie von der Zahl  $i$  unabhängig sind.

Die  $n$  gefundenen Bedingungs-Gleichungen lassen sich in eine einzige Gleichung vereinigen; setzen wir nemlich

$$A_1(F) = X_{1,1} \frac{dF}{dx_1} + X_{1,2} \frac{dF}{dx_2} + \dots + X_{1,n} \frac{dF}{dx_n}$$

$$A_2(F) = X_{2,1} \frac{dF}{dx_1} + X_{2,2} \frac{dF}{dx_2} + \dots + X_{2,n} \frac{dF}{dx_n},$$

so dass  $A_1(F)$  und  $A_2(F)$  in dem früher definirten Sinne Symbole unserer beiden infinitesimalen Transformationen sind, so löst die Gleichung

$$A_1(A_2(F)) - A_2(A_1(F)) = c_1 A_1(F) + \dots + c_r A_r(F)$$

sich, wie man durch Ausführung findet, in die  $n$  obenstehenden Gleichungen auf.

Berücksichtigen wir, dass  $A_1 F$  und  $A_2 F$  zwei beliebig gewählte infinitesimale Transformationen unserer Gruppe sind, so können wir den folgenden wichtigen Satz aussprechen:

*Theorem 1. Bezeichnen*

$$A_1 F, A_2 F \dots A_r F$$

*$r$  unabhängige infinitesimale Transformationen einer  $r$ -gliedrigen Gruppe, so drückt jedes*

$$A_1(A_k(F)) - A_k(A_1(F))$$

*sich als Summe der  $A_i F$  multiplicirt mit Constanten aus.*

In einem folgenden Paragraphe beweisen wir, dass diese nothwendigen Relationen auch hinreichend sind, das heisst, dass  $r$  unabhängige infinitesimale Transformationen, welche diese Relationen erfüllen, immer einer  $r$ -gliedrigen Gruppe, und zwar einer ganz bestimmten angehören.

## § 5.

## Die eingliedrige Gruppe.

Es seien

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n, \alpha)$$

die Gleichungen einer eingliedrigen Gruppe, und

$$\delta x_i = X_i(x_1 \dots x_n) \delta t$$

die der Gruppe zugehörige (Satz 7) infinitesimale Transformation. Alsdann ist nach den Ergebnissen des eben citirten Paragraphs

$$X_i(f_1 \dots f_n) \delta t = \frac{df_i}{d\alpha} d\alpha = df_i$$

wo  $t$ , als von den  $x$  unabhängig, eine gewisse Funktion von  $\alpha$  sein muss

$$t = t(\alpha).$$

Integriren wir nun das simultane System

$$\frac{df_1}{X_1(f_1 \dots f_n)} = \dots = \frac{df_n}{X_n(f_1 \dots f_n)} = dt$$

wo die  $f$  als Funktionen von  $t$  aufzufassen sind, so finden wir  $n$  Integral-Gleichungen der Form

$$\Omega_i(f_1 \dots f_n, t) = \text{Const.}$$

Hier machen wir die Substitution

$$t = 0$$

und finden so, indem wir

$$t(\alpha_0) = 0, f_i(x_1 \dots x_n, \alpha_0) = f_i^0,$$

setzen,

$$\Omega_i(f_1 \dots f_n, t) = \Omega_i(f_1^0 \dots f_n^0, 0),$$

und durch Auflösung hinsichtlich der  $f_i$

$$f_i = W_i(f_1^0 \dots f_n^0, t),$$

oder

$$x_i' = W_i(f_1^0 \dots f_n^0, t).$$

Es lässt sich nun zeigen, dass

$$x_i' = W_i(x_1 \dots x_n, \alpha)$$

eine Form unserer eingliedrigen Gruppe ist. Um dies nachzuweisen, bemerken wir, dass die Gleichungen

$$f_1^0 = f_1(x_1 \dots x_n a_0)$$

nach dem Satze 6 durch Auflösung

$$x_1 = f_1(f_1^0 \dots f_n^0 \omega)$$

geben, wo  $\omega$  eine allerdings unbekannte Constante ist. Und aus der letzten Gleichung zusammen mit

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a)$$

folgt nach der Definition des Begriffs Transformations-Gruppe

$$x_1' = f_1(f_1^0 \dots f_n^0 A),$$

wo  $A$  eine gewisse Funktion von  $a$  bezeichnet. Halten wir diesen Ausdruck mit dem früher gefundenen

$$x_1' = W_1(f_1^0 \dots f_n^0 t)$$

zusammen, folgt

$$f_1(f_1^0 \dots f_n^0 A(a)) = W_1(f_1^0 \dots f_n^0 t(a))$$

und also im Allgemeinen

$$f_1(x_1 \dots x_n A(a)) = W_1(x_1 \dots x_n t(a))$$

oder was auf dasselbe hinauskommt

$$f_1(x_1 \dots x_n a) = W_1(x_1 \dots x_n \psi(a)).$$

Hiermit ist aber nachgewiesen, dass

$$x_1' = W_1(x_1 \dots x_n a)$$

eine Form unserer Gruppe  $x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a)$  ist. Offenbar ist auch

$$\Omega_1(x_1' \dots x_n' t) = \Omega_1(x_1 \dots x_n 0)$$

eine Form derselben Gruppe. Dies giebt

*Satz 9. Gehört die infinitesimale Transformation*

$$\delta x_1 = X_1(x_1 \dots x_n) \delta t$$

*einer eingliedrigen Gruppe an, und sind*

$$\Omega_1 \dots \Omega_n$$

*ein System Integrale des simultanen Systems*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

*so bilden die  $n$  Gleichungen*

$$\Omega_1(x_1' \dots x_n' t) = \Omega(x_1 \dots x_n 0)$$

*eine Form unserer Gruppe.*

## § 6.

**Eine Gruppe ist bestimmt durch ihre infinitesimale Transformationen.**

Seien jetzt vorgelegt  $r$  unabhängige infinitesimale Transformationen  $A_1 F \dots A_r F$ .

$$A_i F = X_{i1} \frac{dF}{dx_1} + \dots + X_{in} \frac{dF}{dx_n}$$

einer  $r$ -gliedrigen Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r).$$

Ich werde zeigen, dass hiermit die Gruppe völlig bestimmt ist.

Dieser Satz folgt als Corollar aus dem Satze, dass jede eingliedrige Gruppe, deren infinitesimale Transformation der  $r$ -gliedrigen Gruppe angehört, eine Untergruppe derselben ist. Dies soll zunächst erwiesen werden.

Es sei

$$A F = X_1 \frac{dF}{dx_1} + \dots + X_n \frac{dF}{dx_n}$$

eine beliebige infinitesimale Transformation unserer Gruppe; alsdann ist es möglich (§ 3) solche infinitesimale Grössen  $da_1 \dots da_r$  zu wählen, dass

$$X_1(f_1 \dots f_n) dt = \sum_k \frac{df_1}{da_k} da_k = df_1$$

ist. Hierbei sind die  $da_k$  als unabhängig von den  $x$ , Funktionen von den  $a$  und  $dt$ , das heisst, es besteht ein simultanes System

$$\frac{da_1}{\psi_1(a_1 \dots a_r)} = \dots = \frac{da_r}{\psi_r(a_1 \dots a_r)} = dt,$$

dessen Integral-Gleichungen

$$\varphi_i(a_1 \dots a_r, t) = \text{Const.},$$

die  $a$  als Funktionen von  $t$  bestimmen.

Integriren wir andererseits das simultane System

$$\frac{df_1}{X_1(f_1 \dots f_n)} = \dots = \frac{df_n}{X_n(f_1 \dots f_n)} = dt$$

wobei die  $f$  als Funktionen von  $t$  aufzufassen sind, so finden wir  $n$  Integral-Gleichungen der Form

$$\Omega_1(f_1 \dots f_n t) = \text{Const.},$$

und wenn wir  $t = 0$  machen, und die entsprechenden Werthe der  $a$  mit  $a_1^0 \dots a_r^0$  bezeichnen, und endlich

$$f_i(x_1 \dots x_n a_1^0 \dots a_r^0) = f_i^0$$

setzen, kommen die Gleichungen

$$\Omega_1(f_1 \dots f_n t) = \Omega_1(f_1^0 \dots f_n^0 0)$$

lie, aufgelöst hinsichtlich der  $f$ , geben

$$f_i = W_i(f_1^0 \dots f_n^0 t)$$

der

$$x_i' = W_i(f_1^0 \dots f_n^0 t).$$

Wir bemerken nun (Satz 6) dass die Gleichungen

$$f_i(x_1 \dots x_n a_1^0 \dots a_r^0) = f_i^0$$

aufgelöst hinsichtlich der  $x_i$  in die folgenden übergehen

$$x_i = f_i(f_1^0 \dots f_n^0 w_1 \dots w_r)$$

wo  $w_1 \dots w_r$  gewisse, übrigens unbekannte Constanten sind.

Und aus den letzten Gleichungen zusammen mit

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n a_1^0 \dots a_r^0)$$

folgen nach unserer Definition des Begriffs Transformations-Gruppe

$$x_i' = f_i(f_1^0 \dots f_n^0 A_1 \dots A_r),$$

wo die  $A$  gewisse Funktionen von den  $a$  und  $w$  sind. Halten wir diese Ausdrücke mit den früher gefundenen

$$x_i' = W_i(f_1^0 \dots f_n^0 t)$$

zusammen, folgt

$$W_i(f_1^0 \dots f_n^0 t) = f_i(f_1^0 \dots f_n^0 A_1 \dots A_r)$$

und also im Allgemeinen

$$W_i(x_1 \dots x_n t) = f_i(w_1 \dots w_n A_1 \dots A_r).$$

Diese Gleichung sagt aber eben, dass die eingliedrige Gruppe

$$x_i' = W_i(x_1 \dots x_n t)$$

eine Untergruppe unserer  $n$ -gliedrigen Gruppe ist. Also

**Satz 10.** *Eine  $r$ -gliedrige Gruppe umfasst eine jede eingliedrige Gruppe, deren infinitesimale Transformation der  $r$ -gliedrigen Gruppe angehört.*

Seien jetzt

$$A_i F = X_{i1} \frac{dF}{dx_1} + \dots + X_{in} \frac{dF}{dx_n} \quad (i = 1 \dots r)$$

$r$  unabhängige infinitesimale Transformationen. Wird das simultane System

$$\frac{dx_k}{\sum_1 \lambda_i X_{ik}} = dt$$

mit den Parametern  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  integriert durch die  $n$  Gleichungen

$$x_k = f_k(\lambda_1 t \dots \lambda_r t),$$

so behaupte ich, dass nicht alle  $f_k$  eine Relation der Form

$$\sum_1 \psi_i(\lambda_1 t \dots \lambda_r t) \frac{df}{d\lambda_k} = 0$$

befriedigen können.

Differentiirt man nämlich die Gleichung

$$\int^{x_k} \frac{dx_k}{\sum_1 \lambda_i X_{ik}} = t = \int^{x_k} \frac{dx_k}{U}$$

hinsichtlich  $\lambda_\rho$ , und bemerkt dabei, dass  $\lambda_\rho$  sowohl unter dem Integral-Zeichen wie im oberen Grenzen des Integrals vorkommt, so findet man

$$\frac{1}{U} \frac{dx_k}{d\lambda_\rho} = \int^{x_k} \frac{dx_k}{U^2} \frac{dU}{d\lambda_\rho}.$$

Wäre nun

$$\sum_\rho \psi_\rho(\lambda_1 t \dots \lambda_r t) \frac{df_k}{d\lambda_\rho} = 0,$$

so käme

$$\int^{x_k} \frac{dx_k}{U^2} \sum_\rho \psi_\rho(\lambda_1 t \dots \lambda_r t) \frac{dU}{d\lambda_\rho} = 0,$$

woraus

$$\sum_\rho \psi_\rho(\lambda_1 t \dots \lambda_r t) \frac{dU}{d\lambda_\rho} = 0 \quad (5)$$

folgen würde. Nun aber ist

$$U = \sum_1 \lambda_i X_{ik}$$

und



$$\frac{dU}{d\lambda_\rho} = X_{\rho k} + \sum_i \sum_l \lambda_l \frac{dX_l}{dx_i} \frac{dx_i}{d\lambda_\rho};$$

durch Einsetzung in (5) folgt

$$\sum_\rho \psi_\rho(\lambda_1 t \dots) X_{\rho k} + \sum_i \sum_l \lambda_l \frac{dX_l}{dx_i} \sum_\rho \psi_\rho(\lambda_1 t \dots) \frac{dx_i}{d\lambda_\rho} = 0$$

und da nach unserer Voraussetzung

$$\sum_\rho \psi_\rho(\lambda_1 t \dots \lambda_r t) \frac{dx_i}{d\lambda_\rho} = 0$$

ist, käme

$$\sum_\rho \psi_\rho(\lambda_1 t \dots \lambda_r t) X_{\rho k} = 0,$$

was mit unserer Annahme, dass die vorgelegten  $r$  inf. Transformationen unabhängig sind, im Widerspruche steht.

Seien nun  $A_1 F \dots A_r F$

$$A_i F = X_{i1} \frac{dF}{dx_1} + \dots + X_{in} \frac{dF}{dx_n}$$

$r$  unabhängige infinitesimale Transformationen einer  $r$ -gliedrigen Gruppe. Alsdann bestimmen die Gleichungen

$$\frac{dx_k}{\sum_i \lambda_i X_{ik}} = dt \quad (6)$$

in denen  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  Parameter sind, die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe. Die entsprechenden Integralgleichungen

$$x_k = f_k(x_1^0 \dots x_n^0 \lambda_1 t \dots \lambda_r t)$$

bestimmen nach den im Anfange dieses Paragraphen gegebenen Entwicklungen, die eingliedrige Untergruppe, die der betreffenden infinitesimalen Transformation (6) entspricht. Lässt man die  $\lambda$  variieren, so erhält man successiv  $\infty^{r-1}$  eingliedrige Untergruppen, und also im allen  $\infty^r$  Transformationen, die der Gruppe angehören. Und da diese  $\infty^r$  Transformationen, wie soeben gezeigt, sämtlich verschieden sind, so bildet ihr Inbegriff eben die  $r$ -gliedrige Transformationsgruppe

*Theorem 2. Jede Transformation einer  $r$ -gliedrigen Gruppe gehört einer eingliedrigen Unter-*

gruppe an. Und da die eingliedrigen Untergruppen durch die infinitesimalen Transformationen der  $r$ -gliedrigen Gruppe bestimmt sind, folgt, dass jede  $r$ -gliedrige Gruppe durch ihre infinitesimalen Transformationen völlig bestimmt ist.

## § 7.

**Infinitesimale Transformationen, die den aufgestellten Relationen genügen, erzeugen immer eine Gruppe.**

In einem früheren Paragraphen sahen wir, dass  $r$  unabhängige infinitesimale Transformationen einer  $r$ -gliedrigen Gruppe

$$A_1 F \dots A_r F$$

immer Relationen der Form

$$A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F)) = \sum_{\rho} c_{ik\rho} A_{\rho} F$$

mit constanten Coefficienten erfüllen. Jetzt soll gezeigt werden, dass umgekehrt  $r$  unabhängige inf. Transformationen, die paarweise in einer solchen Beziehung stehen, immer einer  $r$ -gliedrigen Gruppe angehören.

Zum Beweis führen wir statt der ursprünglichen Variablen  $x_1 \dots x_n$  neue Variablen  $y_1 \dots y_n$  ein, die derart gewählt sind, dass

$$A_r y_1 = 0 \dots A_r y_{n-1} = 0, A_r y_n = 1.$$

Sind

$$A_1' F \dots A_r' F$$

die Symbole unserer inf. Transformationen in diesen neuen Variablen, so ist

$$A_k' F = A_k F$$

$$A_i'(A_k'(F)) - A_k'(A_i'(F)) = A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F)).$$

Ferner ist offenbar

$$A_r' F = \frac{dF}{dy_n}$$

und also nehmen die  $r-1$  Bedingungs-Gleichungen

$$A_k'(A_r'(F)) - A_r'(A_k'(F)) = c_{kr1} A_1' F + \dots + c_{krr} A_r' F,$$

wenn wir

$$A_k' F = Y_{k1} \frac{dF}{dy_1} + \dots + Y_{kn} \frac{dF}{dy_n}$$

setzen, die Form an

$$\sum_i \frac{dY_{ki}}{dy_n} \frac{dF}{dy_i} = \sum_\rho c_{k\rho} A_\rho' F.$$

Diese Gleichungen erlauben die Grössen  $Y_{ki}$ , aufgefasst als Funktionen von  $y_n$ , zu bestimmen. Um aber diese Bestimmung möglichst einfach durchführen zu können, versuchen wir die inf. Transformationen

$$A_1' F \dots A_{r-1}' F$$

derart zu wählen, dass die Coefficienten  $c_{k\rho}$  so einfach als möglich werden.

Wir setzen zunächst für  $k = 1 \dots r-1$ :

$$B_k F = A_k' F + \mu_k A_r' F,$$

wo  $\mu_k$  constant ist. Hierbei kommt

$$B_k(A_r'(F)) - (A_r'(B_k(F))) = \sum_\rho c_{k\rho} B_k F + (c_{kr} - \mu_k c_{k1} - \dots - \mu_{r-1} c_{k,r-1}) A_r' F$$

Es fragt sich, ob es möglich ist für alle  $k$  das letzte Glied wegzuschaffen. Indem wir eine erste Beschränkung einführen, dass nämlich die Determinante

$$(c_{11} c_{22} \dots c_{r-1, r-1})$$

von Null verschieden ist, können wir wirklich dies erreichen, so dass

$$B_k(A_r'(F)) - A_r'(B_k(F)) = \sigma_{k1} B_1 F + \dots + \sigma_{k, r-1} B_{r-1} F$$

wird.

Sodann setzen wir

$$CF = \nu_1 B_1 F + \dots + \nu_{r-1} B_{r-1} F = \sum_k \nu_k B_k F,$$

woraus

$$C(A_r'(F)) - A_r'(C(F)) = B_1 F \sum_k \nu_k \sigma_{k1} + \dots + B_{r-1} F \sum_k \nu_k \sigma_{k, r-1}$$

und wir versuchen die Constanten  $\nu_k$  derart zu wählen, dass die rechte Seite in der letzten Gleichung die Form

$$w CF = w(\nu_1 B_1 F + \dots + \nu_{r-1} B_{r-1} F)$$

annimmt. Dies ist immer möglich, da die Gleichungen



Die eingliedrige Gruppe, deren infinitesimale Transformation

$$A_r' F = \frac{dF}{dy_n}$$

ist, wird bestimmt durch die Gleichungen.

$$y_1' = y_1 \dots y_{n-1}' = y_{n-1}, y_n' = y_n + \tau$$

und die früher besprochene Succession drückt sich daher folgendermassen aus

$$(7) \quad y_i' = y_i + \lambda_1 \Phi_{1i} e^{w_1(y_n + \tau)} + \dots + \lambda_{r-1} \Phi_{r-1,i} e^{w_{r-1}(y_n + \tau)} \\ i = 1 \dots m-1$$

$$y_n' = y_n + \tau + \lambda_1 \Phi_{1n} e^{w_1(y_n + \tau)} + \dots + \lambda_{r-1} \Phi_{r-1,n} e^{w_{r-1}(y_n + \tau)}.$$

Um andererseits die eingliedrige Gruppe zu bestimmen, deren infinitesimale Transformation die allgemeine Form

$$A_r' F + \rho_1 C_1 F + \dots + \rho_{r-1} C_{r-1} F$$

besitzt, wobei die  $\rho_k$  infinitesimale Grössen sind, müssen wir das simultane System

$$\frac{dy_1'}{\sum_k \rho_k \Phi_{k1} e^{w_k y_n'}} = \dots = \frac{dy_n'}{1 + \sum_k \rho_k \Phi_{kn} e^{w_k y_n'}} = dt$$

integriren. Indem wir von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung wegsehen, finden wir zunächst

$$y_n' = y_n + t;$$

und wenn wir diesen approximativen Werth einsetzen, kommt

$$dy_1' = dt \sum_k \rho_k \Phi_{k1} e^{w_k(y_n + t)}$$

woraus durch Integration

$$y_1' = y_1 + \sum_k \frac{\rho_k}{w_k} \Phi_{k1} e^{w_k(y_n + t)}$$

$$y_n' = y_n + t + \sum_k \frac{\rho_k}{w_k} \Phi_{kn} e^{w_k(y_n + t)}$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass die hiermit definirte Transformation bei passender Wahl der Grössen  $\rho_k$  und  $t$  mit der Transformation (7) übereinstimmt. Dies tritt in der That ein, wenn man

$$t = \tau, \rho_k = w_k \lambda_k$$

setzt.

Indem wir nun zu den ursprünglichen Variabeln  $x_1 \dots x_n$  zurückkehren, können wir den folgenden Satz aussprechen:

**Satz 11.** Sind  $A_1 F, \dots, A_{r-1} F, A_r F$  unabhängige infinitesimale Transformationen, und steht dabei  $A_r F$  zu den übrigen Transformationen in solcher Beziehung, dass  $r-1$  Gleichungen der Form

$$A_r(A_k(F)) - A_k(A_r(F)) = \sum_{\rho} c_{k\rho} A_{\rho} F$$

stattfinden, so ist die Succession einer beliebigen endlichen Transformation der von  $A_r F$  erzeugten eingliedrigen Gruppe mit einer infinitesimalen Transformation der Form  $\sum \lambda_k A_k F$  äquivalent mit einer einzigen Transformation einer eingliedrigen Gruppe, deren inf. Transformation die allgemeine Form

$$A_r F + \rho_1 F + \dots + \rho_{r-1} A_{r-1} F$$

besitzt.

Allerdings ist unser Beweis für diesen Satz nur unter den beiden beschränkenden Voraussetzungen gültig, dass die Determinante  $(c_{11}, c_{22}, \dots, c_{r-1, r-1})$  von Null verschieden ist, dass ferner die oben besprochene algebraische Gleichung vom  $(r-1)^{\text{ten}}$  Grade  $r-1$  distinkte Wurzel besitzt. Dass der Satz auch in allen übrigen Fällen gültig bleibt, liesse sich durch einen Grenz-Uebergang einsehen. Oder auch könnte man den Beweis für die verschiedenen Fälle direkt durchführen, was keine principielle Schwierigkeiten bietet. Da indess die Consequenzen dieses Satzes weder in dieser Abhandlung noch bei meiner Bestimmung aller Transformations-Gruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit wesentlich benutzt werden, kann ich es zu einer anderen Gelegenheit verschieben, den Beweis meines Satzes vollständig durchzuführen.

Sind nun

$$x_i' = \varphi_i(x_1 \dots x_n, \lambda_1 t \dots \lambda_r t)$$

die Gleichungen der eingliedrigen Gruppe, deren inf. Transformationen die allgemeine Form

$$\lambda_1 A_1 F + \dots + \lambda_r A_r F$$

besitzt, wobei wir fortwährend voraussetzen, dass jedes  $A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F))$  sich als Summe der  $A_k F$ , multiplicirt mit Constanten ausdrückt, so ist es leicht zu erkennen, dass die Succession zweier beliebigen Transformationen der Form

$$x_i' = \varphi_i(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)$$

und

$$x_i'' = \varphi_i(x_1 \dots x_n b_1 \dots b_r)$$

mit einer einzigen Transformation derselben Schaar äquivalent ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist ja nemlich soeben für den speciellen Fall nachgewiesen, dass die Transformation  $x_i'' = \varphi_i(x_1 \dots b_r)$  infinitesimal ist. Da nun aber nach unseren früheren Entwicklungen die Transformation  $x_i'' = \varphi_i(x_1 \dots b_r)$  durch eine unendlich-malige Wiederholung der infinitesimalen Transformation

$$b_1 A_1 F + \dots + b_r A_r F$$

ersetzt werden kann, so ist hiermit die allgemeine Richtigkeit meiner Behauptung nachgewiesen. Und also können wir den folgenden Satz aussprechen:

*Theorem 3. Sind  $A_1 F \dots A_r F$   $r$  unabhängige infinitesimale Transformationen, die in solcher gegenseitigen Beziehung stehen, dass sich jedes  $A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F))$  als Summe der  $A_k F$ , multiplicirt mit Constanten ausdrückt, und bestimmen ferner die Gleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n \lambda_1 t \dots \lambda_r t)$$

*die eingliedrige Gruppe, deren infinitesimale Transformation die allgemeine Form  $\sum_k \lambda_k A_k F$  besitzt, so bestimmen dieselben Gleichungen nachdem nur die Größen  $\lambda_k t$  durch  $a_k$  ersetzt sind:*

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_r)$$

*eine  $r$ -gliedrige Gruppe, an der die infinitesimalen Transformationen  $A_k F$  angehören.*

## § 8.

**Allgemeine Sätze über Untergruppen.**

Wir haben gefunden, dass zwischen  $r$  unabhängige infinitesimalen Transformationen  $A_1 F \dots A_r F$  einer  $r$ -gliedrigen Gruppe charakteristische Beziehungen der Form

$$A_1(A_k(F)) - A_k(A_1(F)) = \sum_{\rho} c_{1k\rho} A_{\rho} F$$

stattfinden. Es ist nun leicht nachzuweisen, dass die Constanten  $c$  durch eine grosse Anzahl Bedingungs-Gleichungen verbunden sind. Setzt man nämlich wie gewöhnlich

$$(A_1 A_k) = A_1(A_k(F)) - A_k(A_1(F))$$

so besteht zwischen drei beliebigen  $A F$  die bekannte *Jacobische* Identität

$$((A_1 A_k) A_s) + ((A_k A_s) A_1) + ((A_s A_1) A_k) = 0.$$

Führt man in sie zuerst einmal die Werthe

$$(A_{\mu} A_{\nu}) = \sum_{\rho} c_{\mu\nu\rho} A_{\rho}$$

ein, und anwendet sodann dieselben Relationen noch einmal, so kommt schliesslich eine Relation der Form

$$C_1 A_1 + C_2 A_2 + \dots + C_r A_r = 0,$$

in der die  $C_k$  Funktionen der  $c_{\mu\nu\rho}$  sind. Und da die  $A_k F$  unabhängige infinitesimale Transformationen sind, folgt

$$C_1 = 0, C_2 = 0 \dots C_r = 0$$

oder entwickelt

$$\sum_{\rho} (c_{1k\rho} c_{\rho s\sigma} + c_{ks\rho} c_{\rho 1\sigma} + c_{s1\rho} c_{\rho k\sigma}) = 0$$

wo die Zahlen  $i k s \sigma$  vier beliebige unter den Zahlen  $1 2 \dots r$  bezeichnen.

Wir sagen, dass eine  $\rho$ -gliedrige Gruppe *Untergruppe* einer  $r$ -gliedrigen Transformations-Gruppe ist, wenn die Transformationen der ersten sämtlich der letzten angehören.

Es ist algebraisch möglich, alle  $\rho$ -gliedrigen Untergruppen der allgemeinsten  $r$ -gliedrigen Gruppe zu bestimmen. Seien in der That



$$A_1 F \dots A_r F$$

$r$  unabhängige inf. Transformationen einer  $r$ -gliedrigen Gruppe, so dass

$$(A_i A_k) = \sum_s c_{iks} A_s$$

ist, wobei die  $c_{iks}$  den soeben aufgestellten Relationen erfüllen. Setzen wir nun

$$B_1 F = \lambda_{11} A_1 + \dots + \lambda_{1r} A_r$$

$$B_2 F = \lambda_{21} A_1 + \dots + \lambda_{2r} A_r$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_\rho F = \lambda_{\rho 1} A_1 + \dots + \lambda_{\rho r} A_r$$

so ist es einleuchtend, dass jedes  $(B_i B_k)$  sich als Summe der  $A_k$  multiplicirt mit Constanten ausdrückt. Verlangen wir dagegen, dass alle  $(B_i B_k)$  sich als Summen der  $B_k$  multiplicirt mit Constanten ausdrücken, so erkennt man, dass hierzu das Bestehen mehrerer algebraischen Relationen zwischen den Constanten  $\lambda$  erforderlich ist. Indem man diese Relationen in allgemeinsten Weise befriedigt, erhält man eo ipso in allgemeinsten Weise  $\rho$  inf. Transformationen der ursprünglichen Gruppe, die eine Gruppe erzeugen, welche selbstverständlicherweise eine Untergruppe ist.

Früher haben wir schon gezeigt, dass jede  $r$ -gliedrige Gruppe  $\infty^{r-1}$  eingliedrige Untergruppen enthält. In späteren Paragraphen werden wir mehrere ähnliche Sätze beweisen so z. B. dass jede inf. Transformation einer Gruppe an einer zweigliedrigen Untergruppe angehört.

Bei dieser Gelegenheit beschränke ich mich darauf, einen allgemeinen Satz aufzustellen, aus dem hervorgeht, dass jede  $r$ -gliedrige Gruppe zwischen  $n$  Variablen, wenn  $r$  grösser als  $n$  ist, Untergruppen besitzt.

Seien

$$x_1' = f_1(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_n \dots a_r)$$

die Gleichungen einer Gruppe. Ich unterwerfe die Coefficienten  $a$  den Bedingungen

$$\xi_i = f_i(\xi_1 \dots \xi_n a_1 \dots a_n \dots a_r),$$

wobei die  $\xi$  allgemeine Constanten bezeichnen sollen. Aus diesen  $n$  Gleichungen lassen sich  $n$  oder unter Umständen  $n-q$  Grössen  $a$  als Funktionen der übrigen  $a$  und der  $\xi$  bestimmen:

$$a_k = \varphi_k(\xi_1 \dots \xi_n a_1 \dots a_{r-n+q}).$$

Ich behaupte, dass die Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_{r-n+q} \varphi_{r-n+q+1} \dots \varphi_r)$$

oder kürzer geschrieben

$$x_i' = F_i(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_{r-n+q})$$

eine  $(r-n+q)$ gliedrige Gruppe bestimmen.

In der That, setzen wir

$$x_i' = F_i(x_1 \dots x_n a_1 \dots a_{r-n+q})$$

und

$$x_i'' = F_i(x_1' \dots x_n' b_1 \dots b_{r-n+q})$$

so folgt, da diese Transformationen der vorgelegten  $r$ -gliedrigen Gruppe angehören,

$$(8) \quad x_i'' = f_i(x_1 \dots x_n c_1 \dots c_r)$$

wo die  $c$  gewisse Funktionen von  $a_1 \dots a_{r-n+q} b_1 \dots b_{r-n+q}$  sind. Da aber identisch

$$\xi_i = F_i(\xi_1 \dots \xi_n a_1 \dots a_{r-n+q})$$

und ebenso

$$\xi_i = F_i(\xi_1 \dots \xi_n b_1 \dots b_{r-n+q})$$

ist, folgt

$$\xi_i = f_i(\xi_1 \dots \xi_n c_1 \dots c_r)$$

was wieder heisst, dass die Transformation (8) die Form

$$x_i'' = F_i(x_1 \dots x_n c_1 \dots c_{r-n+q})$$

annehmen kann. Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen.

Hier soll noch Folgendes bemerkt werden. Sind

$$A_1 F \dots A_r F$$

$r$  unabhängige inf. Transformationen einer  $r$ -gliedrigen Gruppe, so darf bekanntlich keine lineare Relation der Form

$$\sum_k c_k A_k F = 0$$

mit constanten Coefficienten stattfinden. Dagegen ist es gut denkbar, und im Allgemeinen auch der Fall, dass zwischen den  $A$  Relationen der Form

$$\sum_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n) A_k F = 0$$

bestehen. Ist insbesondere  $r > n$ , so existiren selbstverständlich jedenfalls  $r - n$  solche Relationen zwischen den  $A_k F$ .

### § 9.

#### Gruppen von Berührungs-Transformationen.

Unsere bisherigen Untersuchungen lassen sich unter einem allgemeineren Gesichtspunkte sehen, wobei doch zu bemerken ist, dass die betreffende Verallgemeinerung sich zunächst als eine Specialisation darbietet.

Während wir uns nämlich bis jetzt überhaupt mit Gruppen von Transformationen zwischen zwei Variabel-Systemen  $x_1 \dots x_n$  und  $x'_1 \dots x'_n$  beschäftigt haben, in denen einerseits alle  $x$  andererseits alle  $x'$  als gleichberechtigt aufgefasst wurden, beschränken wir uns jetzt auf Gruppen von *Berührungs-Transformationen*. Dabei sagen wir wie immer, dass eine Transformation zwischen den Variabel-Systemen

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n \\ x'_1 \dots x'_n p'_1 \dots p'_n \end{aligned}$$

in denen sowohl die  $p_k$  wie die  $p'_k$  als Verhältnissgrössen aufgefasst werden, eine Berührungs-Transformation ist, wenn die Bedingungs-Gleichung

$$\sum p'_k dx'_k - \sum p_k dx_k$$

identisch stattfindet.

Und wir behandeln das folgende Problem:

*Problem. Bestimm alle Gruppen von Berührungs-Transformationen.*

Bei der Entwicklung dieser Theorie setze ich als bekannt voraus meine früheren Untersuchungen über Berührungs-Transformationen, die ich in der Abhandlung Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen (Math. Annalen Bd VIII) in Zusammenhange dargestellt habe.

Aus der citirten Arbeit entlehne ich zunächst den Satz, dass jede infinitesimale Berührungs-Transformation sich durch Gleichungen der Form

$$\delta x_k = \frac{dH}{dp_k} \delta t, \quad \delta p_k = - \frac{dH}{dx_k} \delta t$$

ausdrückt; hier bezeichnet  $H$  eine ganz beliebige Funktion der  $x$  und  $p$ , die hinsichtlich der  $p$  homogen von erster Ordnung ist. Repräsentiren wir nun wie früher unsere inf. Transformation durch eine einzige Funktion  $A F$ , so wird

$$A F = \sum_k \left( \frac{dH}{dp_k} \frac{dF}{dx_k} - \frac{dH}{dx_k} \frac{dF}{dp_k} \right) = (H F)$$

das allgemeine Symbol einer infinitesimalen Berührungs-Transformation.

Es stellt sich nun die beiden wichtigen Fragen, unter welchen Bedingungen  $r$  inf. Berührungs-Transformationen

$$A_1 F \dots A_r F, \quad \text{wo} \quad (A_k F) = (H_k F)$$

unabhängig sind, und wenn sie eine  $r$ -gliedrige Gruppe erzeugen.

Unabhängig sind sie, wenn keine lineare Relation mit constanten Coefficienten

$$c_1 A_1 F + \dots + c_r A_r F = 0$$

oder

$$c_1 (H_1 F) + \dots + c_r (H_r F) = 0$$

oder endlich

$$(c_1 H_1 + \dots + c_r H_r, F) = 0$$

identisch stattfindet. Dies giebt

**Satz 12.** *Die infinitesimalen Berührungs-Transformationen,*

$(H_1 F) \dots (H_r F)$  sind unabhängig, wenn keine lineare Relation der Form

$$c_1 H_1 + \dots + c_r H_r = 0$$

mit constanten Coefficienten stattfindet.

Sollen andererseits unsere  $r$  inf. Transformationen eine  $r$ -gliedrige Gruppe erzeugen, so ist, wissen wir, dazu nothwendig und hinreichend, dass die  $A_k F$  paarweise Relationen der Form

$$A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F)) = \sum_s c_{iks} A_s F$$

erfüllen. Und da in unserem Falle

$$A_i F = (H_i F), \quad A_k F = (H_k F)$$

und

$$A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F)) = ((H_i H_k) F)$$

ist, erhält man die Bedingungs-Gleichungen

$$((H_i H_k) F) = \sum_s c_{iks} (H_s F),$$

die sich in die  $2n$  folgenden zerlegen

$$\begin{aligned} \frac{d(H_i H_k)}{dx_m} &= \sum_s c_{iks} \frac{dH_s}{dx_m}, \\ \frac{d(H_i H_k)}{dp_m} &= \sum_s c_{iks} \frac{dH_s}{dp_m}; \end{aligned}$$

nun aber kommt durch Integration

$$(H_i H_k) = \sum_s c_{iks} H_s + \text{Const.},$$

welche Gleichung mit den  $2n$  vorangehenden aequivalent ist. Und da sowohl  $(H_i H_k)$  wie  $H_s$  homogen von erster Ordnung hinsichtlich der  $p$  ist, muss die Constante gleich Null sein.

Nennen wir nun kurzweg die Transformation, deren Symbol im alten Sinne  $(H F)$  ist, «die Transformation  $H$ », so können wir den folgenden Satz aussprechen.

**Theorem 4.** Sollen  $r$  unabhängige infinitesimale Berührungs-Transformationen  $H_1 \dots H_r$  eine  $r$ -gliedrige Gruppe erzeugen, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass jedes  $(H_i H_k)$  sich als Summe der  $H_k$  multiplicirt mit Constanten ausdrückt.

Ich bezeichne diese Gruppe häufig kurzweg als die Gruppe  $H_1 \dots H_r$ .

### § 10.

#### Ein Fundamental-Satz über eine Classe Transformations-Gruppen.

In meiner früher citirten Abhandlung über Berührungs-Transformationen brauchte ich das Wort Gruppe in einem anderen Sinne als hier. Ich sagte, dass  $r$  unabhängige Funktionen  $u_1 \dots u_r$  von  $x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$  eine Gruppe bildeten, wenn jedes  $(u_i, u_k)$  sich als Funktion der  $u$  ausdrücken liesse. Enthielte die Gruppe insbesondere  $r$  unabhängige Funktionen, die hinsichtlich der  $p$  homogen waren, nannte ich die Gruppe *homogen*. In der Zukunft werde ich, wo eine Verwechslung überhaupt möglich ist, das Wort Funktionen-Gruppe in demselben Sinne wie in jener Abhandlung das Wort Gruppe anwenden. Ich distinguire also in der Zukunft zwischen den beiden wesentlich verschiedenen Begriffen *Funktionen-Gruppe* und *Transformations-Gruppe*.

Ist  $H_1 \dots H_r$  eine Transformations-Gruppe, so dass also jedes  $(H_i, H_k)$  sich als Summe der  $H$ , multiplicirt mit Constanten ausdrückt, so bilden einige unter den  $H$  eine Funktionen-Gruppe, an der die übrigen  $H$  angehören. Besteht überhaupt keine Relation der Form

$$\Phi(H_1 \dots H_r) = 0,$$

so bilden die  $H$  eine  $r$ -gliedrige Funktionen-Gruppe, und dann decken sich die beiden Begriffe Transformations-Gruppe und Funktionen-Gruppe.

Wird eine Transformations-Gruppe  $H_1 \dots H_r$  in eine andere  $H_1' \dots H_r'$  übergeführt, so zwar, dass jedes  $H_k$  in das entsprechende  $H_k'$  übergeht, so muss auch nach den Entwicklungen meiner früher citirten Abhandlung

$$(H_i, H_k) = (H_i', H_k')$$

sein. Und daher geht die Gleichung

$$(H_i H_k) = \sum_s c_{iks} H_s$$

in die entsprechende

$$(H_i' H_k') = \sum_s c_{iks}' H_s'$$

über.

Es liegt umgekehrt die Vermuthung nah, dass zwei  $r$ -gliedrige Gruppen immer in einander transformirt werden können, wenn  $r$  solche inf. Transformationen in beiden Gruppen resp.  $H_1 \dots H_r$  und  $H_1' \dots H_r'$  gewählt werden können, dass in den Relationen

$$(H_i H_k) = \sum_s c_{iks} H_s, (H_i' H_k') = \sum_s c_{iks}' H_s'$$

immer

$$c_{iks} = c_{iks}'$$

ist; anders ausgesprochen: wenn die betreffenden Gruppen gleichzusammengesetzt sind. Dies ist doch nicht der Fall. *Zwei gleichzusammengesetzte Gruppen sind im Allgemeinen nicht ähnlich. Dagegen sind selbstverständlicherweise zwei ähnliche Gruppen immer gleichzusammengesetzt.*

Um die Kriterien für die Aehnlichkeit zweier  $r$ -gliedrigen Gruppen aufzufinden, ist es zweckmässig sich auf den folgenden, von mir herrührenden Fundamental-Satz (Math. Ann. Bd. VIII, p. 271) zu stützen.

*Sollen die Funktionen  $F_1 \dots F_m$  einer  $m$ -gliedrigen Funktionen-Gruppe in die Funktionen  $\Phi_1 \dots \Phi_m$  einer anderen  $m$ -gliedrigen Funktionen-Gruppe durch eine Berührungs-Transformation übergeführt werden können, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass jedes  $(F_i F_k)$  sich in derselben Weise als Funktion von  $F_1 \dots F_m$  wie  $(\Phi_i \Phi_k)$  sich als Funktion von  $\Phi_1 \dots \Phi_m$  ausdrückt.*

Sei nun vorgelegt eine Transformations-Gruppe

$$H_1 \dots H_{2m} \dots H_r,$$

deren zugehörige Funktionen-Gruppe keine ausgezeichnete Funktionen enthält, und daher die canonische Form

$$X_1 \dots X_m P_1 \dots P_m$$

besitzt. Sind  $H_1 \dots H_{2m}$  von einander unabhängige Funktionen, so drücken  $H_{2m+1} \dots H_r$  sich als Funktionen von  $H_1 \dots H_{2m}$  aus:

$$H_{2m+q} = \Omega_q (H_1 \dots H_{2m}).$$

Wenn die Zusammensetzung der Transformations-Gruppe bekannt ist, das heisst, wenn in den Relationen

$$(H_i H_k) = \sum c_{ikr} H_r$$

die Constanten  $c$  gegeben sind, so ist es möglich die Funktionen  $\Omega_q$  zu bestimmen. Man bilde in der That die Gleichungen

$$(H_1 H_{2m+q}) = a_1 H_1 + \dots + a_r H_r$$

$$(H_2 H_{2m+q}) = b_1 H_1 + \dots + b_r H_r$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(H_{2m} H_{2m+q}) = g_1 H_1 + \dots + g_r H_r,$$

die die Form

$$\sum_{i=1}^{2m} \frac{dH_{2m+q}}{dH_i} (H_1 H_i) = a_1 H_1 + \dots + a_r H_r$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{i=1}^{2m} \frac{dH_{2m+q}}{dH_i} (H_{2m} H_i) = g_1 H_1 + \dots + g_r H_r$$

annehmen. Da nun nach unserer Voraussetzung die Funktionen-Gruppe  $H_1 \dots H_{2m}$  keine ausgezeichnete Funktionen enthält, und also die Determinante

$$[(H_1 H_1) (H_2 H_2) \dots (H_{2m} H_{2m})]$$

von Null verschieden ist, so lassen die obenstehenden Gleichungen sich hinsichtlich der Differential-Quotienten von  $H_{2m+q}$  auflösen

$$\frac{dH_{2m+q}}{dH_i} = W_{qi} (H_1 \dots H_{2m} \dots H_r),$$

wobei die  $W$  als bekannte Funktionen aufzufassen sind. Aus diesen  $qi$  Gleichungen folgt durch Integration eines totalen Systems die Bestimmung von  $H_{2m+1} \dots H_r$  als Funktionen von  $H_1 \dots H_{2m}$  und gewissen arbiträren Constanten  $K_1 \dots K_s$ :



$$H_{2m+q} = \Phi_q(H_1 \dots H_{2m} K_1 \dots K_q).$$

Eine nähere Bestimmung der Constanten  $K$  wird erhalten, indem man die Gleichungen

$$(H_{2m+1} H_{2m+k}) = h_1 H_1 + \dots + h_r H_r$$

bildet.

Beschränkt man sich also auf Transformations-Gruppen, deren Funktionen-Gruppen keine ausgezeichnete Funktionen enthält, so kann man alle Transformations-Gruppen  $H_1 \dots H_r$  deren Zusammensetzung durch die Gleichungen

$$(H_i H_k) = \sum c_{ik\alpha} H_\alpha$$

gegeben ist, folgendermassen bestimmen. Man wählt eine beliebige gerade Zahl, die nicht grösser als  $r$  ist, etwa  $2m$ ; und macht die erste Hypothese, dass die betreffende Funktionen-Gruppen  $2m$  Glieder enthält. Man wählt sodann unter den  $r$  Grössen  $H_1 \dots H_r$   $2m$  beliebige, etwa

$$H_a, H_b, \dots H_g$$

und macht die zweite Hypothese, dass sie unabhängige Funktionen sind. Sodann bestimmt man nach der eben entwickelten Theorie die übrigen  $H$  als Funktionen der gewählten  $H$

$$H_\rho = \Omega_\rho(H_a \dots H_g K_1 \dots K_\sigma).$$

Giebt man nun endlich die Constanten  $K$  gewisse Zahlen-Werthe, so sind alle hierdurch bestimmten Transformations-Gruppen aehnlich.

Sind nemlich  $H_1 \dots H_r$  und  $H'_1 \dots H'_r$  zwei Transformations-Gruppen, die den gemachten Hypothesen entsprechen, und sind etwa  $H_1 \dots H_{2m}$  und  $H'_1 \dots H'_{2m}$  die zugehörigen Funktionen-Gruppen, so sind  $H_{2m+q}$  und  $H'_{2m+q}$  dieselben Funktionen bez. von  $H_1 \dots H_{2m}$  und  $H'_1 \dots H'_{2m}$ . Ferner drückt jedes  $(H_i H_k)$  sich in derselben Weise als Funktion von  $H_1 \dots H_{2m}$  aus, wie das entsprechende  $(H'_i H'_k)$  sich als Funktion von  $H'_1 \dots H'_{2m}$  ausdrückt. Folglich giebt es nach unserem obenstehenden Theoreme eine Berührungs-Transformation, welche  $H_1 \dots H_{2m}$  bez. in  $H'_1 \dots H'_{2m}$  überführt; und

es ist einleuchtend, dass  $H_{2m+1} \dots H_r$  gleichzeitig in  $H_{2m+1}' \dots H_r'$  übergehen.

Hiermit ist folgender merkwürdige Satz bewiesen:

**Theorem 5.** *Die allgemeinste  $r$ -gliedrige Transformations-Gruppe, deren zugehörige Funktionen-Gruppe keine ausgezeichnete Funktionen enthält, hängt nur von einer begrenzten Anzahl Constanten ab.*

### § 11.

#### Ausdehnung des vorangehenden Satzes auf beliebige Transformations-Gruppen.

Wir wenden uns nun zu Transformations-Gruppen, deren Funktionen-Gruppen  $q$  ausgezeichnete Funktionen enthalten.

Wir werden versuchen, die allgemeinste  $r$ -gliedrige Transformations-Gruppe  $H_1 \dots H_r$  zu bestimmen, deren Zusammensetzung durch die Gleichungen

$$(H_i H_k) = \sum c_{ikn} H_n$$

gegeben ist.

Nach meiner Theorie homogener Gruppen sind zwei Fälle zu berücksichtigen, erstens dass die  $q$  ausgezeichneten Funktionen sämtlich von nullter Ordnung sind; und zweitens dass nur  $q-1$  unter den ausgezeichneten Funktionen von nullter Ordnung sind. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des ersten Falles. Der zweite Fall liesse sich in ganz entsprechender Weise erledigen.

Sei also

$$X_1 \dots X_{m+q} P_1 \dots P_m$$

eine canonische Form der betreffenden Funktionen-Gruppe; und

$$H_1 \dots H_{2m} X_{m+1} \dots X_{m+q}$$

eine andere Form derselben Gruppe. Alsdann sind die inf. Transformationen  $H_{2m+1} \dots H_r$  gewisse Funktionen der letzten Grössen:

$$H_{2m+k} = \Omega_k(H_1 \dots H_{2m} X_{m+1} \dots X_{m+q}),$$

die wir bestimmen werden.<sup>1)</sup>

Wir bilden die Gleichungen.

$$(H_1 H_{2m+k}) = a_1 H_1 + \dots + a_r H_r$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(H_{2m} H_{2m+k}) = g_1 H_1 + \dots + g_r H_r$$

oder entwickelt

$$\sum_{i=1}^{2m} (H_1 H_i) \frac{dH_{2m+k}}{dH_i} = a_1 H_1 + \dots + a_r H_r$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{i=1}^{2m} (H_{2m} H_i) \frac{dH_{2m+k}}{dH_i} = g_1 H_1 + \dots + g_r H_r;$$

in diesen Gleichungen treten eigentlich links  $q$  weitere Glieder auf; da indess die Grössen  $X_k$  nach unserer Voraussetzung ausgezeichnete Funktionen sind, verschwinden diese Glieder identisch. Da die vorgelegte Funktionen-Gruppe keine weitere ausgezeichneten Funktionen als  $X_{m+1} \dots X_{m+q}$  besitzt, und in Folge dessen die Determinante

$$[(H_1 H_1) \dots (H_{2m} H_{2m})]$$

von Null verschieden ist, lassen die  $2m$  letzten Gleichungen sich hinsichtlich der Grössen

$$\frac{dH_{2m+k}}{dH_1} \dots \frac{dH_{2m+q}}{dH_{2m}}$$

aufösen

$$\frac{dH_{2m+k}}{dH_1} = W_{k1}(H_1 \dots H_r)$$

<sup>1)</sup> Bei der Behandlung des zweiten Falles, wo die Gruppe die Form

$$X_1 \dots X_{m+q} P P_1 \dots P_m$$

oder

$$H_1 \dots H_{2m} P X_{m+1} \dots X_{m+q},$$

besitzt, setzt man die gesuchten Transformationen  $H_{2m+k}$  in der Form

$$H_{2m+k} = P \cdot \Phi \left( \frac{H_1}{P} \dots \frac{H_{2m}}{P} X_{m+1} \dots X_{m+q} \right)$$

Die hervorgehenden Ausdrücke dieser Grössen enthalten arbiträre Funktionen von  $X_{m+1} \dots X_{m+q}$ .

wo die  $W$  bekannte Funktionen der betreffenden Argumente sind. Aus diesen Gleichungen folgt durch Integration eines totalen Systems die Bestimmung von  $H_{2m+1} \dots H_r$  als Funktionen von  $H_1 \dots H_{2m}$ ;

$$H_{2m+k} = \Phi_k(H_1 \dots H_{2m} K_1 \dots K_r);$$

dabei sind die Integrations-Constanten als arbiträre Funktionen von  $X_{+1} \dots X_{m+q}$  aufzufassen. Bildet man endlich Gleichungen

$$(H_{2m+i} H_{2m+k}) = \mu_1 H_1 + \dots + \mu_r H_r,$$

so erhält man gewisse Relationen zwischen diesen arbiträren Funktionen, vermöge deren *ihre Anzahl erniedigt wird*. Nach dieser Reduction bleiben jedenfalls  $q$  arbiträre Funktionen, indem die betreffende Funktionen-Gruppe  $2m + q$  distinkte Funktionen enthalten soll. Unter den zurückgebliebenen arbiträren Funktionen kann man offenbar  $q$  wählen und bez. gleich

$$X_{+m+1} \dots X_{m+q}$$

setzen. Wählt man endlich in bestimmter Weise die noch zurückgebliebenen arbiträren Funktionen, so sind alle hiermit definirten Transformations-Gruppen ähnlich. Dies beweist man genau wie die entsprechende Behauptung in dem vorangehenden Paragraphen.

Hiermit ist der folgende Fundamental-Satz bewiesen:

*Theorem 6. Die allgemeinste  $r$ -gliedrige Transformationsgruppe, deren zugehörige Funktionen-Gruppe  $q$  ausgezeichnete Funktionen, sämtlich von nullter Ordnung, enthält, hängt von einer begrenzten Anzahl arbiträrer Funktionen von  $q$  Argumenten ab. Sind diese arbiträren Funktionen, die sämtlich dieselben  $q$  Argumente enthalten, in bestimmter Weise gewählt, so sind alle hiermit definirten Gruppen ähnlich.*

## § 12.

**Jede Transformations-Gruppe ist gleichzusammengesetzt mit einer linearen Gruppe.**

Sei  $H_1 \dots H_r$  eine  $r$ -gliedrige Gruppe, deren Zusammensetzung durch die Gleichungen

$$(H_1 H_k) = \sum_i c_{ik} H_i$$

bestimmt ist.

Ich bilde die Ausdrücke

$$A_1 F = \sum_i \frac{dF}{dy_i} \sum_k c_{k1i} y_k$$

und behaupte, dass die  $r$  inf. Transformationen  $A_1 F \dots A_r F$  eine  $r$ -gliedrige Gruppe bilden, die mit der ursprünglichen gleichzusammengesetzt ist, das heisst, dass

$$A_j (A_i (F)) = A_i (A_j (F)) = \sum c_{ji1} A_i F$$

ist.

Es ist

$$A_j F = \sum_i \frac{dF}{dy_i} \sum_k c_{kji} y_k$$

$$A_i F = \sum_\sigma \frac{dF}{dy_\sigma} \sum_k c_{k1\sigma} y_k$$

also kommt

$$(A_j A_i) = \sum_\sigma \frac{dF}{dy_\sigma} \sum_k \sum_l (c_{kji} c_{l1\sigma} - c_{k1\sigma} c_{lji}) y_k$$

und unsere Behauptung ist, dass dieser Ausdruck auf die Form

$$\sum_i c_{ji1} \sum_\sigma \frac{dF}{dy_\sigma} \sum_k c_{k1\sigma} y_k$$

gebracht werden kann; oder was auf dasselbe hinauskommt, dass die Summe

$$\sum_i (c_{kji} c_{l1\sigma} - c_{k1\sigma} c_{lji} - c_{jli} c_{k1\sigma})$$

identisch verschwindet. Früher haben wir aber gesehen, dass diese Bedingungs-Gleichung wirklich stattfindet, wenn die inf. Transformationen  $H_1 \dots H_r$  paarweise die Relationen

$$(H_1 H_k) = \sum_i c_{ik} H_i$$

erfüllen. Also können wir den folgenden Satz aussprechen:

*Theorem 7. Wenn eine Transformations-Gruppe vorgelegt ist, so kann man immer eine lineare Transformations-Gruppe aufstellen, die mit ihr gleich-zusammengesetzt ist.*

Uebrigens kann man aus den obenstehenden analytischen Entwicklungen noch einen anderen bemerkenswerthen Schluss ziehen. Bestehen in der That die Bedingungs-Gleichungen

$$(9) \quad \sum_s (c_{ks} c_{sl} \sigma - c_{kl} c_{sj} \sigma - c_{jl} c_{ks} \sigma) = 0$$

so ziehen, fanden wir, die Gleichungen

$$A_i F = \sum_s \frac{dF}{dy_s} \sum_k c_{kis} y_k$$

die folgenden

$$A_j(A_i(F)) - A_i(A_j(F)) = \sum_s c_{jis} A_s(F)$$

nach sich. Umgekehrt ist aber früher gefunden, dass die letzten Gleichungen die obenstehenden Relationen zwischen den  $c$  nach sich ziehen. Folglich sind diese beiden Gleichungs-Systeme aequivalent. Also

*Theorem 8. Sind  $A_1 F, \dots, A_r F$  inf. Transformationen einer Gruppe, deren Zusammensetzung durch die Relationen*

$$A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F)) = \sum_s c_{iks} A_s F$$

*bestimmt ist, so sind die Constanten  $c$  durch die Bedingungs-Gleichungen (9) verbunden; und wenn umgekehrt ein Grössen-System  $c$  vorgelegt ist, welches diese Bedingungs-Gleichungen erfüllen, so giebt es immer Transformations-Gruppen, welche die hiermit definirte Zusammensetzung besitzen.*

Hier möge noch der folgende Satz seinen Platz finden:

*Satz 13. Jede infinitesimale Transformation der  $r$ -gliedrigen Gruppe  $H_1, \dots, H_r$  gehört einer zweigliedrigen Untergruppe an.*

Um zu beweisen, dass etwa  $H_1$  einer zweigliedrigen Untergruppe angehört, setzen wir

$$H = \rho_2 H_2 + \dots + \rho_n H_n,$$

woraus

$$(H_1 H) = \sum_k \rho_k \sum_s c_{1ks} H_s$$

oder

$$(H_1 H) = \sum_s H_s \sum_k \rho_k c_{1ks}$$

Es handelt sich darum diese Gleichung auf die Form

$$(H_1 H) = \mu H_1 + \nu H = \mu H_1 + \nu \sum_k \rho_k H_k$$

zu bringen. Dies giebt zur Bestimmung der Grössen  $\rho$ ,  $\mu$  und  $\nu$  die folgenden Bedingungs-Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_k \rho_k c_{1k1} &= \mu \\ \sum_k \rho_k c_{1k2} &= \nu \rho_2 \\ \sum_k \rho_k c_{1k3} &= \nu \rho_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_k \rho_k c_{1kn} &= \nu \rho_n, \end{aligned}$$

und da diese Relationen immer befriedigt werden können, so ist hiermit die Richtigkeit unseres Satzes nachgewiesen.

In entsprechender Weise könnte man beweisen, dass jede zweigliedrige Untergruppe in einer dreigliedrigen Untergruppe enthalten ist. In dieser Weise wird man auf die Vermuthung geführt, dass jede  $(m-1)$ gliedrige Untergruppe in einer  $m$ -gliedrigen Untergruppe enthalten ist, was doch nicht der Fall ist; eine eingehende Entwicklung dieser Theorie kann erst in späteren Arbeiten gegeben werden.

## Note.

Vervollständigung der Theorie der  
Berührungs-Transformationen.

Ich benutze die Gelegenheit zur Erledigung einer Lacune in der Theorie der Berührungs-Transformationen, die sich zugleich in der allgemeinen Theorie des Pfaffschen Problems wie auch in der Theorie der vollständigen Lösungen fühlbar gemacht hat.

In allen diesen Theorien handelt es sich bekanntlich darum eine Gleichung der Form

$$p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n - p_1' dx_1' - \dots - p_n' dx_n' \quad (1)$$

in allgemeinsten Weise zu befriedigen, dabei vorausgesetzt dass  $x_1' \dots x_n' p_1' \dots p_n'$  als Funktionen von den Grössen  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$ , die selbst unabhängige Variablen sind, aufgefasst werden.

In früheren Arbeiten habe ich gezeigt, dass die  $x_i' p_i'$  die folgenden Relationen erfüllen

$$(x_i' x_k') - (x_i' p_k') - (p_i' p_k') = 0, (x_i' p_i') = 1,$$

dass ferner Grössen  $x_i' p_i'$ , die diese Gleichungen befriedigen, die Bedingungs-Gleichung (1) erfüllen.

Schon längst kannte man eine andere allgemeine Methode zur Auffindung von Grössen  $x_i' p_i'$ , welche die Gleichung (1) befriedigten. Man nehme in der That  $q$  beliebige Relationen zwischen den  $x$  und  $x'$

$$\Omega_1(x_1 \dots x_n x_1' \dots x_n') = 0 \dots \Omega_q = 0 \quad (2)$$

und setze sodann

$$p_k = \sum_i \lambda_i \frac{d\Omega_i}{dx_k}, \quad p_k' = - \sum_i \lambda_i \frac{d\Omega_i}{dx_k'}. \quad (3)$$

Ist es möglich aus diesen  $2n + q$  Gleichungen, nach Elimi-



nation der  $\lambda$ , die Grössen  $x_1'$  und  $p_1'$  als Funktionen von den  $x_i$  und  $p_i$  zu bestimmen, so befriedigen die gefundenen Werthe die Gleichung (1). Durch Differentiation von (2) kommt nemlich unter allen Umständen

$$\sum_k \sum_i \lambda_i \frac{d\Omega_i}{dx_k} dx_k + \sum_k \sum_i \lambda_i \frac{d\Omega_i}{dx_k'} dx_k' = 0$$

und durch Benutzung von (3)

$$\sum_k p_k dx_k - \sum_k p_k' dx_k' = 0,$$

welche Gleichung also *immer* aus (2) und (3) folgt.

Es ist nun aber einleuchtend, dass es unter Umständen unmöglich sein kann, aus den Gleichungen (2) und (3) die Grössen  $x_k' p_k'$  als Funktionen von den  $x_p$  zu bestimmen, indem diese letzten Grössen durch gewisse Relationen

$$W_1(x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n) = 0 \dots W_m = 0$$

verbunden sind. Dieser Ausnahmefall, der früher kaum berticksichtigt worden ist, soll in dieser Note eingehend discuttirt werden. Es soll nachgewiesen werden, dass die Gleichungen (2) und (3) auch in diesem Falle eine Berührungs-Beziehung bestimmen; allerdings nicht zwischen allen Werth-Systemen  $x'p'$  und  $xp$ , sondern nur zwischen denjenigen Werth-Systemen, die zwei  $m$ -gliedrigen Involutions-Systemen resp. in den Variabeln  $xp$  und in den Variabeln  $x'p'$  angehören.

Wir beweisen zunächst, dass sich aus den Gleichungen (2) und (3) immer *gleichviele* Relationen zwischen den Grössen  $xp$  und zwischen den Grössen  $x'p'$  herleiten lassen.

Um diesen merkvürdigen Satz zu beweisen, ist es zweckmässig mit *Klein die Clebscheschen Connex-Coordinationen*

$$x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$$

anzuwenden. Hier fassen wir sowohl die  $x_i$  wie die  $p_i$  als Verhältnissgrössen auf, und ausserdem setzen wir voraus, dass die  $x_i$  und  $p_i$  durch die Bedingungs-Gleichung

$$x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = 0 \quad (4)$$

verbunden sind.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall einer Gleichung

$$\Omega(x_1 \dots x_n x_1' \dots x_n') = 0,$$

die wir sowohl hinsichtlich der  $x_i$  wie der  $x_i'$  homogen von  $s^{\text{ter}}$  Ordnung annehmen können so dass,

$$(5) \quad \sum_k x_k \frac{d\Omega}{dx_k} = s\Omega, \quad \sum_k x_k' \frac{d\Omega}{dx_k'} = s\Omega$$

ist.

Um nun zu entscheiden, ob es möglich ist, aus den Gleichungen

$$\Omega = 0, \quad p_k = \frac{d\Omega}{dx_k} \quad (6)$$

eine oder mehrere Relationen zwischen den  $x$  und  $p$  herzuleiten, bemerken wir, dass wegen (4) und (5)

$$\sum_k x_k \left( p_k - \frac{d\Omega}{dx_k} \right) = \sum x_k p_k - \sum x_k \frac{d\Omega}{dx_k} = -s\Omega$$

ist, und dass also die erste von den Gleichungen (6) eine Consequenz der übrigen ist. Unsere Frage ist also auf die einfachere zurückgeführt, ob sich zwischen den Gleichungen

$$p_1 - \frac{d\Omega}{dx_1} = 0 \dots p_n - \frac{d\Omega}{dx_n} = 0 \quad (7)$$

die Grössen  $x_i'$  eliminiren lassen. Um diese Frage zu entscheiden, muss man die Determinante

$$D = \left( \frac{d^2\Omega}{dx_1 dx_1'}, \frac{d^2\Omega}{dx_2 dx_1'}, \dots, \frac{d^2\Omega}{dx_n dx_n'} \right)$$

aufstellen. Verschwindet  $D$  und zugleich alle Unterdeterminanten von  $1^{\text{ter}}, 2^{\text{ter}} \dots (m-1)^{\text{ter}}$  Ordnung, während es Unterdeterminanten von  $m^{\text{ter}}$  Ordnung giebt, die von Null verschieden sind, so geben die Gleichungen (6)  $m$  und auch nicht mehrere Relationen zwischen den  $x p$ .

Wünscht man andererseits zu wissen, wie viele Relationen zwischen den  $x' p'$  sich aus den Gleichungen

$$\Omega = 0, \quad p_k' = \frac{d\Omega}{dx_k'}$$

herleiten lassen, so wird man durch ein ganz analoges Reasonnement zur Aufstellung der Determinante

$$D' = \left( \frac{d^2 \Omega}{dx_1' dx_1} \frac{d^2 \Omega}{dx_2' dx_2} \cdots \frac{d^2 \Omega}{dx_n dx_n'} \right)$$

geführt. Nun aber ist offenbar  $D'$  identisch dieselbe Determinante wie  $D$ , nur mit dem Unterschiede, dass die Reihen und Colonnen vertauscht sind. Also erkennen wir, dass auch die Grössen  $x_1' p_1'$  durch  $m$ , und auch nicht durch mehrere Relationen verbunden sind. Also

*Satz.* Ist es möglich zwischen den Gleichungen

$$x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = 0, \quad \Omega(x_1 \dots x_n x_1' \dots x_n') = 0$$

$$p_k = \frac{d\Omega}{dx_k}, \quad p_k' = -\frac{d\Omega}{dx_k'}$$

die Grössen  $x_1' \dots x_n' p_1' \dots p_n'$  zu eliminiren, und findet man hierdurch  $m$  Relationen zwischen den  $x p$ , so geben jene Gleichungen auch  $m$  Relationen zwischen den Grössen  $x' p'$ .

Sei jetzt vorgelegt  $q$  Relationen

$$(8) \quad \Omega_1(x_1 \dots x_n x_1' \dots x_n') = 0 \dots \Omega_q = 0$$

und lass uns setzen

$$p_k = \lambda_1 \frac{d\Omega_1}{dx_k} + \dots + \lambda_{q-1} \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_k} + \frac{d\Omega_q}{dx_k} \quad (9)$$

$$p_k' = \lambda_1 \frac{d\Omega_1}{dx_k'} + \dots + \lambda_{q-1} \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_k'} + \frac{d\Omega_q}{dx_k'} \quad (10)$$

Wir können annehmen, dass alle Funktionen  $\Omega$  sowohl hinsichtlich der  $x_1$  wie der  $x_1'$  homogen von  $m$  Ordnung sind.

Wir fragen nun ob es möglich ist zwischen (8) und (9) die Grössen  $\lambda$  und  $x_1'$  zu eliminiren, und hierdurch Relationen zwischen den  $x p$  herzuleiten. Um diese Frage zu beantworten, setzen wir der Kürze wegen

$$\lambda_1 \Omega_1 + \dots + \lambda_{q-1} \Omega_{q-1} + \Omega_q = W$$

und bemerken, dass aus den Gleichungen

$$p_k - \frac{dW}{dx_k} = 0$$

folgt

$$\sum x_k p_k - \sum x_k \frac{dW}{dx_k} - s W = 0$$

oder

$$\lambda_1 \Omega_1 + \dots + \lambda_{q-1} \Omega_{q-1} + \Omega_q = 0$$

In dem Gleichungs-Systeme (8) (9) kann daher eine beliebige der Gleichungen (8) etwa  $\Omega_q = 0$  weggelassen werden, indem sie eine Consequenz von den  $q-1$  übrigen Gleichungen (8) zusammen mit den Gleichungen (9) ist.

Unsere Frage ist somit auf die einfachere zurückgeführt, ob sich zwischen den Gleichungen

$$\Omega_1 = 0 \dots \Omega_{q-1} = 0 \quad p_k = \lambda_1 \frac{d\Omega}{dx_k} + \dots + \lambda_{q-1} \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_k} + \frac{d\Omega_q}{dx_k} \quad (11)$$

die Grössen  $\lambda$  und  $x'$  eliminiren lassen. Diese Frage hängt von der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Omega_1}{dx_1} & \frac{d\Omega_1}{dx_2} & \dots & \frac{d\Omega_1}{dx_n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_1} & \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_2} & \dots & \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{d^2 W}{dx_1 dx_1'} & \frac{d^2 W}{dx_2 dx_1'} & \dots & \frac{d^2 W}{dx_n dx_1'} & \frac{d\Omega_1}{dx_1'} & \dots & \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_1'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^2 W}{dx_1 dx_n'} & \frac{d^2 W}{dx_2 dx_n'} & \dots & \frac{d^2 W}{dx_n dx_n'} & \frac{d\Omega_1}{dx_n'} & \dots & \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_n'} \end{vmatrix}$$

die wir mit  $D$  bezeichnen, ab. Verschwindet  $D$  wie auch alle Unterdeterminanten bis  $(m-1)$ ter Ordnung inclusive, während es jedenfalls eine nicht verschwindende Unterdeterminante von  $m$ -ter Ordnung giebt, so geben die Gleichungen (11)  $m$  Relationen und auch nicht mehrere Relationen zwischen den Grössen  $x$  und  $p$ .

Um die Anzahl der Relationen zwischen  $x'$   $p'$ , die sich aus (8) und (10) herleiten lassen, zu bestimmen, muss man ganz analoge Betrachtungen anstellen. Man bildet eine Determinante  $D'$ , und untersucht, ob sie und ihre Unterdeterminanten verschwinden. Nun aber ist  $D'$  identisch dieselbe

Determinante wie  $D$ , nur mit dem formalen Unterschiede, dass die Reihen und Columnen vertauscht sind. Folglich geben auch die Gleichungen (8) und (10)  $m$  Relationen und auch nicht mehrere zwischen  $x'$  und  $p'$ . Dies giebt

*Satz. Ist es möglich zwischen den Gleichungen*

$$\Omega_1 = 0 \dots \Omega_q = 0$$

$$p_k = \sum_1 \rho_1 \frac{d\Omega_1}{dx_k}, p_k' = \sum_1 \rho_1 \frac{d\Omega_1}{dx_k'}$$

die Grössen  $x_1' \dots x_n' p_1' \dots p_n' \rho_1 \dots \rho_q$  zu eliminiren, und findet man hierdurch  $m$  Relationen zwischen den Grössen  $x_1 p_1$ , so bestimmen jene Gleichungen genau dieselbe Anzahl Relationen zwischen den Grössen  $x_1' p_1'$ .

Lass uns voraussetzen, dass die Gleichungen (8) (9) und (10), die nach dem Vorangehenden immer (1) befriedigen,  $m$  Relationen zwischen  $x_1 \dots p_n$ .

$$W_1(x_1 \dots p_n) = 0 \dots W_m = 0 \quad (12)$$

und also auch  $m$  Relationen zwischen  $x_1' \dots p_n'$

$$\Phi(x_1' \dots p_n') = 0 \dots \Phi_m = 0 \quad (13)$$

bestimmen. Fasst man nun die Grössen  $x_1'$  als Parameter auf, so bestimmen die Gleichungen (8) und (9) nach den Entwicklungen, die ich in meiner allgemeinen Theorie der partiellen Differential-Gleichungen 1.0. (Math. Ann. Bd IX) gegeben habe, Integral- $M_{n-1}$  von den Gleichungen (12), die eo ipso die grösstmögliche Anzahl gemeinsamer Integral- $M_{n-1}$  besitzen. Daher können (12) durch Auflösung auf die Form eines Involutions-Systems gebracht werden, und wir können uns der Einfachheit wegen auf den Fall beschränken, dass dieses Involutions-System die Form

$$p_1 = h_1 \dots p_m = h_m \quad (14)$$

besitzt, wo die  $h$  Funktionen von  $p_{m+1} \dots p_n x_1 \dots x_n$  sind. In ganz entsprechender Weise erkennt man, dass auch die Gleichungen (13) auf die Form eines Involutions-Systems etwa

$$p_1' = h_1' \dots p_m' = h_m' \quad (15)$$

gebracht werden können.

Substituieren wir in

$$p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n = p_1' dx_1' + \dots + p_n' dx_n'$$

statt  $p_1 \dots p_n p_1' \dots p_m'$  die Werthe dieser Grössen:  $h_1 \dots h_m h_1' \dots h_m'$ , so kommt

$$(16) \quad \sum_{\nu=1}^m h_{\nu} dx_{\nu} + \sum_{k=m+1}^n p_k dx_k = \sum_{\nu=1}^m h_{\nu}' dx_{\nu}' + \sum_{k=m+1}^n p_k' dx_k'.$$

Nun aber ist es möglich sowohl die linke wie die rechte Seite dieser Gleichung auf eine  $(n-m)$ gliedrige Form zu bringen. Man kann ja nemlich, da (14) ein Involutions-System ist, solche Grössen  $\Phi_1 \dots \Phi_{n-m} F_1 \dots F_{n-m}$  finden, dass

$$(17) \quad \sum_{\nu} h_{\nu} dx_{\nu} + \sum_k p_k dx_k = \sum_{i=1}^{n-m} \Phi_i dF_i$$

wird, und da (15) ein Involutions-System ist, so kann man solche Grössen  $\Phi_1' \dots \Phi_{n-m}' F_1' \dots F_{n-m}'$  finden, dass

$$(18) \quad \sum_{\nu} h_{\nu}' dx_{\nu}' + \sum_k p_k' dx_k' = \sum_{i=1}^{n-m} \Phi_i' dF_i'$$

wird. Hierdurch kommt

$$(19) \quad \Phi_1 dF_1 + \dots + \Phi_{n-m} dF_{n-m} - \Phi_1' dF_1' + \dots + \Phi_{n-m}' dF_{n-m}'.$$

Lässt man hier  $\Phi_i F_i$  ein bestimmtes Grössen-System, das (17) befriedigt, bezeichnen, so kann man immer unter den Grössen-Systemen  $\Phi_i' F_i'$ , welche (18) befriedigen, ein solches wählen, dass

$$(20) \quad \Phi_i = \Phi_i', F_i = F_i'$$

wird. Wegen (18) bestehen die Gleichungen

$$(p_k - h_k, \Phi_i) = 0, (p_k - h_k, F_i) = 0$$

$$(F_i F_k) - (F_i \Phi_k) - (\Phi_i \Phi_k) = 0, (F_i \Phi_i) = 1$$

und wegen (19) ist ebenso

$$(p_k' - h_k', \Phi_i') = 0, (p_k' - h_k', F_i') = 0$$

$$(F_i' F_k') - (F_i' \Phi_k') - (\Phi_i' \Phi_k') = 0, (F_i' \Phi_i') = 1.$$

Die gefundenen analytischen Formeln zeigen, können wir sagen, dass die charakteristischen  $M_q$  der beiden Involutions-Systeme wie durch eine gewöhnliche Berührungs-Transformation auf einander bezogen sind.

Es ist nun leicht nachzuweisen, dass zwischen den Elementen zweier einander entsprechenden charakteristischen  $M_q$  gar keine durch die Gleichungen (8) (9) und (10) bestimmte Beziehung stattfindet. Da nemlich  $\Omega_1 \dots \Omega_{q-1}$  unabhängige Funktionen von  $x_1 \dots x_n \ x_1' \dots x_n'$  sind, so lassen die Gleichungen

$$p_k = \lambda_1 \frac{d\Omega_1}{dx_k} + \dots + \lambda_{q-1} \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_k} + \frac{d\Omega_q}{dx_k} \quad (9)$$

$$p_k' = \lambda_1 \frac{d\Omega_1}{dx_k'} + \dots + \lambda_{q-1} \frac{d\Omega_{q-1}}{dx_k'} + \frac{d\Omega_q}{dx_k'} \quad (10)$$

sich hinsichtlich  $\lambda_1 \dots \lambda_{q-1}$  auflösen

$$\lambda_1 = f(x_1 \dots p_n \ x_1' \dots p_n'). \quad (21)$$

Folglich lassen sich aus den Gleichungen (8) (9) und (10) nicht mehr als  $2n$  Relationen zwischen  $x_1 \dots p_n \ x_1' \dots p_n'$  herleiten. Nun kennen wir aber  $2n$  solche Relationen, die offenbar unabhängig sind:

$$p_k = h_k, \ p_k' = h_k' \\ F_1 = F_1', \ \Phi_1 = \Phi_1'.$$

Und folglich geben die Gleichungen (8) (9) und (10) keine weitere Relationen zwischen den Grössen  $x p$  und  $x' p'$ .

Wenn die Gleichungs-Systeme (12) und (13) sich nicht auf die Form specieller Involutions-Systeme sondern zwar auf die Form allgemeiner Involutions-Systeme

$$x_k = \varphi_k(x_{q+1} \dots x_n) \ (k = 1 \dots q)$$

$$p_i = h_i(x_{q+1} \dots x_n \ p_1 \dots p_q \ p_{q+m} \dots p_n) \ (i = q+1 \dots q+m)$$

bringen lassen, findet man durch ein ganz analoges Rasonnement entsprechende Resultate, und wir können daher den folgenden Satz aussprechen.

*Theorem. Aus den Gleichungen*

$$\Omega_1(x_1 \dots x_n \ x_1' \dots x_n') = 0 \dots \Omega_q = 0$$

$$p_k = \sum_1 \lambda_1 \frac{d\Omega_1}{dx_k}, \ p_k' = \sum_1 \lambda_1 \frac{d\Omega_1}{dx_k'}$$

*ist es immer möglich  $2n$  und nie mehrere Relationen zwischen den Grössen  $x_1 \dots p_n \ x_1' \dots p_n'$  herzuleiten. Können diese  $2n$*

Gleichungen hinsichtlich  $x_1 \dots p_n$ , und demzufolge auch hinsichtlich  $x_1' \dots p_n'$  aufgelöst werden, so bestimmen sie eine gewöhnliche Berührungs-Transformation. Lassen sich dagegen aus ihnen  $m$  Relationen zwischen  $x_1' \dots p_n'$  herleiten, so sind auch die Grössen  $x_1 \dots p_n$  durch  $m$  Relationen verbunden. Diese beiden  $m$ -gliedrigen Gleichungs-Systeme besitzen, aufgefasst als partielle Differential-Gleichungen, die grösstmögliche Anzahl gemeinsamer Lösungen, und können daher auf die Form zweier Involutions-Systeme gebracht werden. Ich bezeichne dieselben mit

$$u_1 - h_1 = 0 \quad u_1' - h_1' = 0$$

wobei  $u_1 \dots u_m$   $m$  unter den Grössen  $x_1 \dots p_n$ ;  $h_1 \dots h_m$  Funktionen von  $x_1 \dots p_n$  bezeichnen; und ebenso  $u_1' \dots u_m'$   $m$  unter den Grössen  $x_1' \dots p_n'$ ,  $h_1' \dots h_m'$  Funktionen von  $x_1' \dots p_n'$  bezeichnen. Die nachstehenden  $2(n-m)$  Relationen zwischen  $x_1 \dots p_n$   $x_1' \dots p_n'$  können die Form erhalten:

$$F_1 = F_1', \quad \Phi_1 = \Phi_1',$$

wo  $F_1$  und  $\Phi_1$  Funktionen von  $x_1 \dots p_n$  sind, welche die Gleichungen

$$(u_1 - h_1, F_k) = 0 \quad (u_1 - h_1, \Phi_k) = 0$$

$$(F_1 F_k) = (F_1 \Phi_k) = (\Phi_1 \Phi_k) = 0, \quad (F_1 \Phi_1) = 1$$

erfüllen; wo ferner  $F_1'$  und  $\Phi_1'$  Funktionen von  $x_1' \dots p_n'$  sind, welche die entsprechenden Relationen erfüllen.



## **HVORFOR BLÆSER DET IKKE BESTANDIGT FRA ØST I DET SAAKALDTE STILLE BELTE?**

AF

S. A. SEXE.

---

I Jordens nordlige Halvedel bliver, som bekjendt, Passatvinden mere og mere østlig under Løbet fra dens Polargrændse til de saakaldte Kalmer eller det stille Belte. I den sydlige Halvkugle bliver Passaten ligeledes mere og mere østlig under Bevægelsen fra Polargrænsen mod Ækvator. Det er saaledes paafaldende, at der ikke i Klodens varmeste Strøg gaar en Luftstrøm, lig Ækvatorialstrømmen i Tropheavene, med andre Ord: det er paafaldende, at der ikke i det stille Belte stadig hersker den rene Østenvind, især i det stille Hav, hvor dette Belte ikke fjærner sig synderlig fra Ækvator og endog i den nordlige Halvkugles Vintertid ligger saa langt Syd, at det gjennemskjæres af Ækvator. At Østenvinden skulde herske i det stille Belte synes at maatte være en Selvfølge, hvad enten man tænker sig at Atmosfæren i Passatzonerne bevæges hen over Jordens Overflade, eller omvendt, at denne Overflade bevæger sig hen under Atmosfæren. Tænker man sig Passaterne som Luftstrømme, der af en bevægende Kraft føres hen over den i Hvile værende Jordoverflade, saa maatte de, idet de stødte sammen i det stille Belte, tage Veien mod Vest overensstemmende med Lovene for Kræfternes eller Hastighedernes Parallelogram. Selv om den bevægende Kraft ophørte at virke

paa Luftmasserne, idet de træde ind i det stille Belte, saa maatte de tage Veien vestover paa Grund af deres Træghed. Tænker man sig paa den anden Side, hvad der stemmer med det virkelige Forhold, nemlig at Passaten vistnok staar under Indflydelse af en bevægende Kraft, som er rettet lodret paa det stille Belte, men at dens saakaldte vestlige eller fra Øst mod Vest gaaende Komponent skriver sig fra Jordens Omdreining om sin Axe fra Vest mod Øst, saa synes det at maatte følge af sig selv, at Luften retarderede vestover, sakkede agter ligesaa vel i det stille Belte som i Passatzonerne paa begge Sider af samme, især naar man betænker, hvorledes Luften i Passatzonerne maa arbeide paa at drage Luften i det stille Belte vestover med sig formedelst Friktion.

Aarsagen til at Østenvinden ikke er den herskende i det stille Belte, søger man, som bekjendt, deri, at Luften stiger til Veirs i dette Belte. Passatens vestlige Komponent neutraliseres, siger man, derved, at Luften tager Retningen opad. Men Passatens vestlige Komponent, som skriver sig fra Jordens Omdreining om sin Axe, kan ikke neutraliseres, medmindre enten Jorden ophører at dreie sig om Axen, eller der meddeles Luften i det stille Belte en saadan Fart mod Øst, at den holder Skridt med Jordens Omdreiningshastighed. Luftens Stigen til Veirs kan ligesaa lidt have det sidste som det første af disse Alternativer til Følge.

Dersom den Luftmasse, som engang havde faaet Plads i det stille Belte, forblev der uden Tilgang og Afgang, saa kunde man vistnok tænke sig, at denne Luftmasse eller Luft-Ring under Paavirkning af den sig dreieende Jordoverflade omsider var kommen til at rotere ligesaa hurtigt som denne, uagtet Berørelsen med og Friktionen mod Luftstrømmen sendenfor og nordenfor, som retardere mod Vest og selvfølgelig vilde rive Stillebeltets Luft vestover med sig. Men da Luften stiger til Veirs i det stille Belte, saa maa der nedtil strømme Luft fra Siderne ind over dets Gebet overalt. Østenvindens Udeblivelse

fra dette Gebet kan derfor ikke hidrøre derfra, at der paa dette Gebet ingen Veirvexling finder Sted.

Hvad er det da, som holder Østenvinden borte fra det stille Belte, eller med andre Ord: hvad er det, som giver Luften saa stor Rotationshastighed i det stille Belte, at den holder Skridt med Jordoverfladen sammesteds? Dette Spørgsmaal lader sig maaſke besvare paa følgende Maade:

Friktionen mellem den roterende Jordoverflade og Atmosfæren gjør naturligvis Sit til at bibringe en Luftmasse, som bevæger sig fra høiere til lavere Breder en større og større Rotationshastighed. Men paa den ene Side synes den Impuls at maatte være meget stærk, som skulde kunne forege Rotationshastigheden hos en Luftmasse, idet den bevæger sig fra Passatens Polargrændse mod Ækvator, saaledes, at den, kommen ind paa det stille Beltes Gebet, holder Skridt med Jordoverfladen dersteds, medens paa den anden Side Friktionen mellem Atmosfæren og Havfladen paa Grund af dennes Jævnhed ikke synes at kunne være synderlig stærk eller virksom i bemeldte Henseende, hvilket formentlig ogsaa fremgaar deraf, at Passaten — som den beskrives — ikke sætter høi Sø. Desuden synes den roterende Jordoverflades Indflydelse paa Luftens Rotationshastighed at maatte være indskrænket til det Lag af Atmosfæren, som berører Jorden. I ethvert Fald synes bemeldte Indflydelse kun sent at kunne naa op i Høiden. Det er saaledes ikke sandsynligt, at Luftens store Rotationshastighed i det stille Belte skriver sig udelukkende fra Friktionen mellem Atmosfæren og den roterende Jordoverflade. Der maa være en anden Faktor, som har en væsentlig Del heri. Og skulde ikke de fra Tropheavene opstigende Vanddampe være denne Faktor?

Paa Grund af den høie Temperatur i det stille Belte stiger der fra Havet dersteds en stor og stadig fornyet Mængde Vanddampe op i Atmosfæren og blander sig med denne. Disse Dampe have, idet de fremstaa, den samme Rotationshastighed, som Havfladen, hvorfra de komme. De maa derfor paa Grund

af deres Træghed virke til at Luften over Havfladen følger med denne under dens roterende Bevægelse fra Vest mod Øst. Heri ligger en Stræben, der gaar ud paa at forebygge Østervindens Opkomst paa det stille Beltes Gebet, eller med andre Ord: en Modstand mod Passatens vestlige Komponent. Herimod lader sig vistnok indvende for det Første, at det at gøre Modstand mod Passatens vestlige Komponent er ikke det samme som at ophæve den, for det Andet, at, om saa var Tilfældet, saa vilde det være besynderligt, at ikke de fra Havet op i Passatstrømmen stigende Dampe skulde have ophævet dens vestlige Komponent, førend det bar ind i det stille Belte. Herimod er igjen at bemærke for det Første, at Havets Uddunstning vel ikke er saa stærk eller rig udenfor som i det stille Belte, og for det Andet, at Luften maa være tyndere og saaledes lettere baade at sætte i Bevægelse og at stoppe i Farten i det stille Belte end udenfor samme. Bemærkes kan det ogsaa, at Rotationshastighedens Tiltagen fra Parallel til Parallel bliver svagere, jo nærmere man kommer Ækvator. Rotationshastighedens Tilvæxt fra en Parallel til den næste lader sig nemlig udtrykke ved

$$\frac{2\pi r}{24.60.60} [\cos(x-dx) - \cos x] = \frac{2\pi r}{24.60.60} \sin x dx,$$

hvor  $r$  forestiller Jordens Radius og  $\omega$  Bredden. Skjønt altsaa de fra Havet opstigende Dampe ikke ere i Stand til at ophæve Passatens vestlige Komponent udenfor det stille Belte, saa lader det sig dog meget vel tænke, at de kunne gjøre dette i det stille Belte.

Der gives endnu Omstændigheder, som ikke kunne sættes ud af Betragtning under Behandlingen af det foreliggende Spørgsmaal: Under sin Bevægelse fra høiere til lavere Breder forefinder Passatstrømmen en videre og videre Mark at udbrede sig paa, hvilket maa have til Følge, at den sagtner sin Fart efter Meridianen. Det samme maa blive Følgen af at den træffer paa en mere og mere dampende Havflade. Muligens

har ogsaa Luftens Stigen til Veirs i det stille Belte til Følge, at Passatstrømmens Bevægelse i Meridianen langs Jordens Overflade aftager. Der synes saaledes at være gode Grunde til at antage, at Passatstrømmens horizontale Bevægelse i Meridianen efterhaanden sagtnes af, og bliver meget langsom mod Overgangen til det stille Belte. Herfor taler ogsaa den Omstændighed, at Passaten uden at tiltage i Styrke bliver mere og mere østlig, jo nærmere det stille Belte. Thi naar Passaten gaar mere og mere over til Østenvind, saa maa dens meridionale Komponent formindskes i Relation til dens vestlige Do., og naar Vinden under denne Overgang ikke tiltager, saa kan Formindskelsen ikke være relativ, men maa være absolut. Men idet Luften saaledes sagtelig skrider frem efter Meridianen, faar den roterende Jordoverflade saa meget mere Tid til at virke til Forøgelse af dens Rotationshastighed.

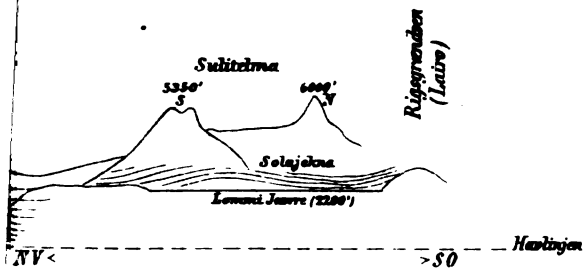
At Nordøstpassaten og Sydøstpassaten ikke forene sig til en stadig og stærk Østenvind i det stille Belte kommer saaledes uden Tvivl deraf: 1) At der fra Havfladen i dette Belte stiger uafbrudt op en stor Mængde Vanddampe, 2) At Luften dersteds er meget fortyndet og 3) At Passatens Bevægelse efter Meridianen, i det Hele svag, bliver svagere og svagere, jo nærmere det stille Belte.

Til Foranstaaende kan maaske med nogen Føie knyttes følgende Antydninger.

Idet Luften stryger langs Jordens Overflade fra Passatens Polargrændse mod lavere Breder, voxer dens Rotationshastighed. Dersom ikke de Vanddampe, som Luften underveis optager fra Jordens Overflade, medvirkede hertil, saa vilde bemeldte Tilvæxt i Rotationshastigheden formentlig udelukkende skrive sig derfra, at den roterende Jordoverflade gennem Friktion i nogen Grad rev Luften østover med sig, hvilket synes at maatte have til Følge en Formindskelse af Jordens Rotationshastighed. Men Luften stiger til Veirs i det stille Belte, løber som Antipassat tilbage til høiere Breder og daler ned med en østlig Komponent,

som, idet den konsumeres under Friktion mod Jordens Overflade, maa forøge Jordens Rotationshastighed. Endnu er vel ikke Tiden kommen til at paapege og drøfte, hvad der befordrer, og hvad der modarbejder Jordklodens Rotationshastighed. Imidlertid lader sig dog vel sige saameget som at det synes tvivlsomt, om Antipassaten gjengiver til Jordens Rotationshastighed, hvad Passaten berøver den. Passaten er stadig, virker uophørlig imod Jordens Omdreining, medens Antipassaten og dens Aflæggere i de extratropiske Zoner ere ustadige. Den levende Kraft, som gaar tabt for Jordens Rotationshastighed, idet Jordens Overflade i lavere Breder ved Friktion river Luft med sig østover, overføres neppe tilfulde paa bemeldte Luft; thi der avles ventelig Varme under Friktionen. Den østlige Komponent, hvormed Antipassaten kommer til de høiere Breder, er saaledes ikke tilfulde erstatningsdygtig, og, idet denne Komponent konsumeres under Friktion mod Jordens Overflade, avles ventelig atter Varme, hvis mekaniske Ækvivalent idetmindste ikke direkte kommer Jordens Rotationshastighed til Gode. Havet, Indsøer fordunste uden at Jordens Rotationshastighed afficerer deraf. Dersom de fra Jorden opstigende Vanddampe ved sin medbragte Rotationshastighed og sin Træghed bidrog væsentlig til at forøge Luftens Rotationshastighed under dens Bevægelse fra Passatens Polargrændse mod lavere Breder, saa vilde Antipassatens østlige Komponent være tilveiebragt med mindre Bekostning for Jordens Rotationshastighed og saaledes have lettere for at give denne fuld Erstatning.

Hvis Vanddampene i det stille Belte og i Passatzonerne spille den Rolle, som tildeles dem i det Foregaaende, nemlig at de ved sin Træghed, idet de stige op i Atmosfæren, vanskeliggjøre dennes horizontale Bevægelser, saa forholde de sig naturligvis ligedan, hvorsomhelst de stige op fra Jordens Overflade. Ofte maa de saaledes virke til at forebygge Vind, hvor der hersker Vindstille, og til at fremkalde Vindstille, hvor der hersker



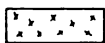
Grundfeldets gneis.



Tromsø glimmerskifer-gruppe.



Balsfjorden skiferfelt.

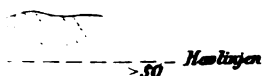


Granit.



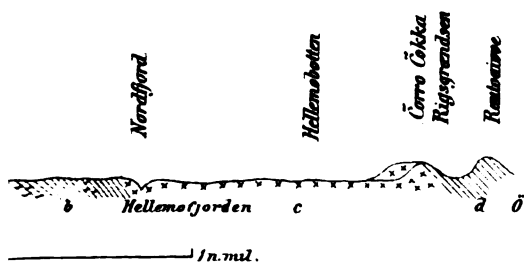
Gneis-granit.

Riggrenden



0 1 n. mil

Hovdingen



1 n. mil.





Vind. De høre saaledes blandt de Midler, hvorved Atmosfæren dels erholder, dels beholder den samme Rotationshastighed som Jordoverfladen i samme Parallel.

I den varme Aarstid er Fordunstningen stærkest; paa samme Tid ere Atmosfærens Bevægelser almindeligvis spagfærdigst: Skulde det Sidste for nogen Del være en Følge af det Første?

Paa Grund af den neddalende Antipassats østlige Komponent skulde man vente, at Passaten i den nordlige Halvkugle begyndte som Nordvest, i den sydlige Do. som Sydvest. Den begynder imidlertid som Nordøst nordenfor Ækvator og som Sydøst søndenfor: Skulde de fra Passatens Polargrænser opstigende Vanddampe have nogen Del heri?

Udenfor Passatens Polargrænse i den sydlige Halvkugle hersker Vestenvind: Vilde dette i samme Grad være Tilfældet, hvis Temperaturen og dermed Fordunstningen var den samme som i de tilsvarende Breder nordenfor Ækvator?

Passaten viser sig først et godt Stykke fra Land. Men da den udgaar dels fra den nordøstlige Kvadrant, dels fra den sydøstlige Do., saa synes det rimeligt, at der i Reglen fra samme Hold maatte gaa et Drag af Luft fra Land ud over Tropehavene udenfor det stille Belte, hvilken Luft vel maatte være meget tør. Jo tørrere Luften er over en Vandflade, desto stærkere uddunster denne: Skulde denne Uddunstning have nogen Del i at Passaten ikke optræder nærmere Land paa Kontinenternes Vestkyster?

Søvind og Landvind vexle, som bekjendt, regelmæssigt med hinanden, især i de varmere Klimater. Søvinden begynder om Morgenen i klart, varmt Veir et lidet Stykke fra et Lands Kyst, stævner sagselig mod Land eller tager et Tilspfang dertil, saa at Vandfladen kruses. Men det gaar smaat med Fremrykningen, den staar ligesom i Stampe: Hvad er i Veien? Skulde det være en livlig Fordunstning inde ved Land, i Fjorde og Bugter?

Den, som har seet, hvorledes vore Fjorde kunne dampe, naar der i Begyndelsen af Vinteren staar Vind fra Land ud over dem, kan vanskelig værges sig for den Tanke, at der skal en Kraft til at sætte saadanne Dampmasser i Bevægelse, som ingenlunde er for Intet at regne.

---

## SALTENS GEOLOGI

AF

KARL PETTERSEN.

Den faste fjeldgrund i strøget mellem Ofoten og Saltenfjord, er bygget af lagrækker, der er at indordne under de samme hovedgrupper, som de, der bygge fjeldgrunden inden Tromsø amt. Foruden det saakaldte Grundfjeld optræder her saaledes ogsaa Tromsø glimmerskifergruppe og Balsfjordens skiferfelt. Af massiver bryder her alene frem et større granitfelt efter Kjeldraget i strøget fra Tysfjordens sidefjord Mandfjord og sydover indtil Ankil-vandene — indenfor bunden af Sørfolden. Kyststrækningens gneisgranit træder desforuden frem i større og mindre masser over forskellige strøg langs fastlandets afslutning mod Vestfjorden. Derimod savnes over hele dette fastlandsparti ganske dioritiske, diabasiske og gabbroartede partier, Mulighed er der dog for at saadanne bjergarter — om og i et ganske underordnet forhold — kunne findes brydende frem inden Sulitelmas højfjeldsgruppe. I morænevoldene langs Sulitelmas gletscher (Salajekna) fandtes idetmindste hyppige brudstykker af en diorit, der antagelig maatte være nedført fra Sulitelmas højfjeldspartier.

I sommeren 1875 opgik jeg fastlandsstrøget mellem Ofoten og Salten. I en nys affattet afhandling:\*) «Bidrag til Saltens orografi» er der leveret en oversigt over de geologiske forholde

\*) Den citerede Afhandling vil blive optaget i dette Tidsskrift.

her. Som et foreløbigt bidrag til nærmere belysning af disse landskabers geologi vedlægges her 3 forskellige profiler optrukne i vest-østlig retning fra Vestfjorden til rigagrænsen. Disse ville da tjene som udgangspunkt for efterfølgende fremstilling:

### 1. Grundfjeldet (laurentisk).

Lagrækker, der kunne være at indordne under den ældste gneisafdeling, træder frem i et bælte mellem Salten fjord og den ytre del af Sørfolden, fremdeles over den vestlige del af halvøen mellem Sørfolden og Nordfolden og stikker endvidere frem langs den nordre side af Nordfolden — mellem Baltjosen og Hopvandet. Grundfjeldet træder fremdeles frem i de lavest liggende partier ved Strømmen mellem Skjærstadfjordens indre bund og Nedre Vand i den saakaldte Vattenbygd ligesom ogsaa paa samme maade ved den øvre ende af Øvre Vand i Vattenbygden. Paa profilridset fig. 1 sees disse tre forskellige partier af grundfjeldet.

Ved Strømmen ligesom ved Øvre-Vandet dannes lagrækken af graa gneis, hornblendegneis og gneisartet glimmerskifer. Strøgetningen er nord-sydlig, faldet stejlt østligt. Paa begge steder er det øjensynligt, at gneisen er at udskille som en ældre dannelse fra den overliggende glimmerskifer.

Tvivlsommere er derimod forholdet i saa henseende over den store vestlige afdeling af grundfjeldet — se profilrids fig. 1.

Kaster man fra bunden af Hopen et blik over det høje fjeldparti, som her stiger op i Mjønesticinderne og de forskellige toppe, som rejse sig langs det store Vattenvattens østlige side, saa vise de i regelen nøgne fjeldpartier en ejendommelig stærkt fremtrædende graalig hvid farve. Denne skyldes en graalig granit, der imidlertid her intetsteds træder frem i større samlede masser, men derimod overordentlig hyppig — i regelen i lejeform — gennem sætter de lagrækker af gneisartet glimmer-

skifer og renere glimmerskifer, der danner fjeldpartiets hovedbestand.

Profilrids fig. 4, der er trukket fra gaarden Løding ved Høpbotten i nord-nordøstlig retning op imod det her opstigende højfjeld, vil tjene til nærmere at belyse forholdene her:

- a) fra stranden opover mægtige lagrækker af graalighvid kornig kalksten. Strøgetning  $10^{\circ}$ , fald vestligt.
- b) Glimmerskifer, der hyppig gjenemsættes af ligeformige masser af graalighvid granit.
- c) Længere frem i profilet sees den granitiske lejeformig frembrydende sten i dagen at skyde frem i pladeformige masser og saaledes dække skikhovederne af de temmelig stejltstaaende lagrækker af glimmerskifer ligesom ogsaa af den kornige kalksten. Dette er de sidste kalkstenslag i lagrækken — fra nu af optræder alene glimmerskifer østover, dog fremdeles i hyppig vexling med granitiske lejeformige dannelser, men nu med østligt fald. Glimmerskiferen er her temmelig mild med mørk glindsende glimmer som temmelig forherskende bestanddel og hyppig indfældt med røde granater. Man er nu naaet op over afhængen af det egentlige højfjeld, og saavidt der kan sees nedenfra er forholdet op over til øverste top af disse mægtige fjeldmasser ganske ensartet med det, der træder frem opover de nederste afsatser. Spørgsmaalet er her om punktet *y* i profilet angiver en formationsgrændse. At glimmerskiferen med kalkstensindlejuingerne er at indordne under Tromsø glimmerskifergruppe maa ansees som utvivlsomt. Glimmerskiferen opover højfjeldet er vistnok endnu ikke gneisartet, og den afvigende faldviukel østenfor og vestenfor det granitiske parti ved punktet *y* kan vel i saa henseende ikke berettiges til nogen afgjørende slutning hverken i den ene eller anden retning. Men den omstændighed, at højfjeldet her i orografisk henseende danner en del af et sammenhørende ensartet bygget fjelddrag, der mod Sørfolden bygges af

renere gneis, og dels ogsaa den omstændighed, at indlejninger af kornig kalksten neppe vil være at paavise over dette højfjeldsdrag, synes paa forhaand maaske at kunne tale til fordel for en saadan udsondring. Skulde dette i virkeligheden være tilfældet, saa maa højfjeldets lagrækker utvivlsomt være ældre end glimmerskifergruppen.

Forholdet i saa henseende er dog som nævnt her ingenlunde klart.

Følges Sørfoldens sydlige side fra handelsstedet Røsvik udover, saa findes ved Røsvik glimmerskifer med mægtige indlejninger af kornig kalksten — tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe. Strøgetning omkring nordsydlig med stejlt vestligt fald. Fra Røsvik vestover savnes ganske kalkstensindlejninger, glimmerskiferen bliver haardere men er fremdeles feltspathfri. Strøg- og faldretning uforandret — man skrider altsaa over stadig yngre og yngre lag. Ved Sjunkfjord og paa begge sider af Nevelfjord optræder derimod renere gneisartede lagrækker, hyppig med granitiske partier, der lejeformig ligesom ogsaa i tynde striber vexler med gneisen. Gneislagene vise nord-sydlig strøgetning og stejlt vestligt fald — altsaa en lagstilling, der er ganske i overensstemmelse med den, der raader inden glimmerskiferen østenfor. Det synes saaledes som om gneisen her skulde ligge over glimmerskiferen. Det skal dog i saa henseende bemærkes, at det nærmeste grændsestrøg mellem gneis og glimmerskifer — nemlig strøget mellem Kaarsvik og Sjunkfjord — ikke er undersøgt. Der kan saaledes være mulighed for, at der her vil være at paavise foldning inden glimmerskiferens lagstilling.

I strøget tværs over langs den nordlige side af Folden fra Styrkarnes henimod indbøjning til Lørfjord vestover forbi Hjemgang indtil de høje af gneis-granit byggede fjeldpartier, som herfra brede sig vestover forbi Rørstad kirke, træffes lagrækker af haard glimmerskifer og hornblendeskifer i en uafbrudt række med stadig vestligt fald, indtil de opover højfjeldet igjen findes

i hyppig veksling med den hvide granitiske sten — ganske i overensstemmelse med forholdet langs den søndre side. Om disse lagrækker af glimmerskifer ere at indordne under glimmerskifergruppen eller under den ældre gneisafdeling, skal ikke kunne siges med afgjørende bestemthed. I petrografisk henseende staar bjergarten her glimmerskifer nærmere end gneis, men paa den anden side det saa stærkt udviklede krystalliniske præg synes at kunne tale ligesaameget til fordel for en forudsætning om, at disse lagrækker ere ældre end glimmerskiferen.

Følger man fra Mørkesvikfjordens bund langs den søndre side vestover, saa passerer man først et længere udskydende parti af Kjølgreniten, indtil man ud ved Rejnvik finder graniten afløst af lagrækker af glimmerskifer med indlejninger af kornig kalksten — under en nord-sydlig strøgetning og vestligt fald. Længere udover gaar glimmerskiferen over til glimmergneis, og ud imod Stavnes er bjergarten ren gneis, her hyppig vekslede med granitiske partier i ligeformig optræden. Fra Reinsvik ud til Stavnes er lagstilling overalt concordant, nemlig nord-sydlig strøgetning med vestligt fald af  $43^{\circ}$  og derover. Saavidt der kunde iagttages ved at følge denne strækning saagodtsom fod for fod, har man her fra Reinsvik ud til Stavnes en sammenhængende lagrække. Gneisen skulde altsaa her ligge over glimmerskiferen.

Forholdene ere imidlertid i sin helhed ikke saaledes udredede, at der i saa henseende skal kunne drages sikre slutninger. Trods de til dato aflæste forholde, der nærmest synes at pege i retning af, at gneisen og glimmerskiferen danne led af samme hovedgruppe, tror jeg dog foreløbig at burde holde paa en udsondring mellem gneisen og glimmerskiferen, og derunder at sætte gneisen som et ældre bygningsled. Paa profilet (fig. 1) er gneisen saaledes her indordnet under det saakaldte grundfjeld. Det vil imidlertid i mer end en henseende være af interesse at faa sagen nærmere udredet, og den her omhand-

lede halvø mellem Salten og Sørfoldens yderparti vil antagelig ogsaa afgive i flere retninger et ret interessant undersøgelsesfelt.

Den her omhandlede gneis-afdeling, der træder frem i profilridserne 1 og 2, er som ovenfor nævnt nært knyttet til gneis-granitiske dannelser, der dels kunne optræde i mer eller mindre underordnet forhold dels ogsaa som mere selvstændige partier.

Den her optrædende granitiske bjergart viser sig i dagen i regelen med hvid eller graalighvid farve og dannes af hvid orthoklos, hvid til vandklar kvarts og mørk magnesiaglimmer, men ofte ogsaa sølvhvid kaliglimmer.

Over de strax udenfor Bodø liggende smaaøer Burø, Nyholmen og Hjertø træder saaledes gneis-granitiske partier frem mellem lagrækker af haard glimmerskifer, der i tilfælde af sondring mellem gneisen og Tromsø glimmerskifergruppe nærmest maa blive at henhøre til gneisafdelingen.

Over Burø stikker glimmerskiferen frem i strimler langs strandlinjerne langs øens østlige og vestlige side — langs den østlige side i vexling med granitiske lag. Strøgretningen er paa begge sider 40° til 50° med 60° vestligt fald. Forøvrigt dannes den lave øes faste fjeldgrund af granit. Graniten optræder saaledes her som et ret mægtigt leje samtidig som tyndlagede granitiske partier findes vexlende med glimmerskifer i den smale skiferstrimmel ved stranden.

Den granitiske bjergart træder her frem som et mellemlid mellem gneis og granit — med en udpræget parallelstruktur og hyppig gjennemsat af kløfter, der stryge i samme retning som foliationsfladerne.

Nyholmen er paa det nærmeste bygget af den samme gneis-granit, der langs den vestlige side bryder frem langs en tynd strimmel stejltstaaende lagrækker af haard glimmerskifer. Strøgretning 40°, fald stejlt vestligt til vertikalt. Det samme forhold træder frem over den omkring 350 fod høje Hjertholm.



Her stikker den smale skiferstrimmel frem langs den østlige side under en strøgetning af  $40^\circ$  og stejlt til vertikalt fald.

Den 1 mil vestenfor fastlandet liggende store og høje ø Landegode er antagelig helt og holdent bygget af denne graalig-hvide gneis-granitiske afændring.

Langs fastlandsstranden fra Bodø by ud mod Hernes gennemses den haarde glimmerskifer dels af lejeformige, men hyppigst af gangformige dannelser af en storkornig granit. Gangene gennemses skiferen lodret mod strøgetningen — undertiden ogsaa efter diagonalretningen.

Den hvide feltspath i disse gangpartier dannes i regelen af Oligoklas med fin fremtrædende tvillingstrikning. Denne gangformige granit er antagelig at udskille som en senere eruptiv dannelse fra den mere masseformig optrædende metamorfoserede gneis-granit.

Den lille halvø vestenfor Ejdtsen ved Sørfoldens udmunding er bygget af gneis og glimmerskifer i overordentlig hyppig veksling med striber, tykkere lag samt klumpformige partier af den hvide granitiske sten. Gneisens strøgetning er her  $20^\circ$ , faldet stejlt, vestligt. Efter et 28 fods langt profil lodret paa strøgetningen fandtes gneisen gennemsat af 9 forskellige tykkere og tyndere granitbaand.

Den granitiske sten dannedes her af hvidlig feltspath, graalig til rødbrun kvarts og kaliglimmer i tykke pladeformige partier ved siden af mørk magnesiaglimmer. Sort Turmalin er her ligeledes iagttaget.

Den fremspringende halvø mellem Nevelfjorden og Sjunkefjorden, der stiger op i den høje Skejstind (Purkviktind) er helt og holdent bygget af en graa ulaget gneisgranit, der ligeledes bryder frem langs den nordre side af Folden i det høje fjeldparti om Rørstad kirke. I denne granit sees Orthoklasen hyppig med tvillingkrystaller efter Karlsbader-loven — sammenvoxede i lange parallelle zoner af indtil 30 mm. længde og hvert individ med en brede af indtil 5 mm. Grændselinjen mellem

halvdelene er skarp. Den saaledes baandvise veksling af stærkt glands med mat overflade giver bjergarten her et ofte ret prægtfuldt præg.

Den omkring 600' høje Hjertø — der ligger midt i udløbet af Nordfolden, er bygget af gneislag i hyppig veksling med gneisgranit. Renere granit optræder her tildels i ret mægtige bænke og i fremspringende kupper, men i det hele i saadan veksling med gneisen, at gneis og granit her utvivlsomt maa danne det af et og samme oprindelige hele. Graniten er her rigt indfældt med røde granater.

Strøgetningen over Hjertø er adskillig variabel — i regelen nord-sydlig med vestligt fald.

Ved Stavnes veksler gneisen hyppig med granitiske partier, der her træder lejeformig frem. Gneisens strøgetning 10° med vestligt fald.

Med undtagelse af de gangformige dannelser ved Bode ligesom muligens ogsaa Skejstindens og Rørstads granit ere de øvrige her omhandlede granitiske dannelser at indordne under kyststrækningens gneisgranit.

I mægtigere masser træder gneisgraniten frem i Skotetindens drag ud mod Grøtø, i den store halvø fra Dragejdet ndover Hammerø og fremdeles over halvøen mellem Stedfjord og Ejfjord. Ogsaa Tjeldelandet ved den sydlige side af Ofoten er bygget af gneisgranit.

## 2. Tromsø glimmerskifergruppe (huronisk)

danner fjeldgrunden over forholdsvis anseelige vidder i strøget mellem Ofoten og Saltenfjord. Halvøen mellem Salten- og Skjærstadfjord samt Sørfolden ligesom ogsaa halvøen mellem Sørfolden og Nordfolden med Mørkesvikfjorden er med fradrag af de strøg, hvor de foromhandlede gneis- og gneisgranitiske dannelser træde frem, paa det nærmeste helt og holdent byggede af glimmerskifer. Det samme er tilfældet med halvøen mellem Nordfolden og Sagfjord. Inden Kjældraget er glimmerskifer-

gruppen saagodtsom eneraadende udenfor kjølgranitens grændselinjer.

Glimmerskifergruppen bygges af lagrækker af mer eller mindre kvartsrig glimmerskifer paa sine steder i vœxling med kvartsitisk glimmerskifer og kvartsit. Ogsaa gneisartede lag kan undertiden være at paavise. Inden glimmerskiferen optræder ogsaa inden disse strøg overordentlig hyppig mer og mindre mægtige indlejninger af graalighvid krystallinisk kornig kalksten. Paa flere steder have disse kalkzoner en anseelig mægtighed og kunne forfølges tildels gennem lange sammenhængende strækninger efter strøgretningen.

Glimmerskifergruppen vil findes trædende frem inden de forskellige profiler, der ere vedlagte afhandlingen.

Strøgretningen er i regelen omkring nord-sydlig — hyppig dog med afbøjning til øst (indtil 40 à 50°). Faldet kan være regelmæssig østligt eller vestligt — altsaa med foldninger. Efter profilet Nr. 1 er faldet vestligt over den hele halvø fra Bodø indtil Fuskœjdet (Saltejdets). Fra Nedrevand østover mod Lang-vandet er faldretningen i regelen østlig. Svingningslinjen for faldretningen ligger saaledes langs den østlige side af Fuskœjdet og kan forfølges nordover til bunden af Sørfolden. Faldvinkelen gaar sjældent under 30°, hyppig op imod 60°. Ogsaa vertikal lagstilling er at paavise.

Af kalkstensdragene, der gennemskjæres af profilet Nr. 1, er det mærkeligste den lange zone, der fra bunden af Valandsfjorden skyder frem i nordøstlig retning over Næverhougen og her over lange strøg indeslutter lag af haarde krystalliniske skifere, der ere rigt indsprængt med rødjernsten og magnetjern, der ogsaa i mægtige mere samlede masser optræder inden den i kalken indlejrede haarde skiferzone. Dette er Næverhougens bekendte malmfelt.

Vestenfor Næverhougen opimod det høje fjeldparti — paa profilridset betegnet med «Mjønesticinden» dukker frem en anden med den nysnævnte parallelløbende kalkzone. Strøgretningen

er her altsaa den samme som ved Næverhougen, faldet derimod stejlere til vertikalt.

Ved handelsstedet Røsvik ved Sørfolden træder ligeledes frem et ret mægtigt kalkdrag under en strøgretning af  $25^{\circ}$  med stejlt vestligt fald.

Det samme er ogsaa tilfældet ved Dybvik ved Fuskeejdets afslutning mod Sørfolden. Stenen er her hvid, smuk finkornig og som det synes temmelig ren. Der er mulighed for at stenen her skulde kunne findes at egne sig som materiale for skulptur.

I bunden af Norddalen, der fra Øvre-Vandet i Vattenbygden skyder i nord- eller nordøstlig retning op imod Blaa- manden, findes mægtige lagrækker af kornig kalksten at træde frem mellem glimmerskiferen under en strøgretning af  $20$  à  $30^{\circ}$  med stejlt østligt fald.

Følges profilridset Nr. 2, saa vil glimmerskifergruppen her findes trædende frem i mægtige lagrækker mellem Skjelverejdet og Baltjosen. Ved Skjelverejdet er strøgretningen omkring  $20^{\circ}$  med stejlt østligt fald — altsaa fra det høje vestenfor frem- brydende gneis-granitiske parti. Over højfjeldet mellem Skjelver- ejdet og Nordfolden indeslutter glimmerskiferen lejer af kornig kalksten. Henimod Nordfolden indtræder en foldning i lag- stillingen, idet faldet her slaar om til vestligt.

Fra den østre side af Baltjosen optræder glimmerskiferen igjen — her i overlejningsforhold til gneisen — og bygger det høje fjelddrag, der stiger op langs Makejdets vestlige side i en række tinder, hvorimellem Sandtind, Kaltind og Rødtind. Opover de nøgne afsatser af flere af disse toppe sees glimmerskiferen i en smuk regelmæssig lagstilling at skyde frem med en nord-sydlig strøgretning og omkring  $45^{\circ}$  vestligt fald.

Fra den indre ende af Sagfjorddalens øverste saakaldte 7de vand rejser sig Slunkas og Ajak-oivves fjelddrag. Dette er bygget af glimmerskifer, der i dragets vestlige del viser en nord-sydlig strøgretning med stejlt til vertikalt fald. Glimmer-

skiferen indeslutter her hyppige indlejninger af kornig kalksten. Skiferen er rigt indflettet med røde granater. Opover Slunkas højfjeld sees i skiferen hyppige kvartsudsondringer med indvoxet Disthen (Cyanit). Rullestene af en brunlig enstatitartet sten laa her omstrøet i stort tal. Trods omhyggelige undersøgelser lykkedes det dog ikke at træffe bergarten i fast fjeld.

Over højfjeldet østenom Slunka optræder i skiferen hyppige og tildels mægtige indlejninger af kornig kalksten. Glimmerskiferen findes her i veksling med hornblendeskifer og paa sine steder med lag af granitisk sten. Østen om det af skifer byggede højfjeld skyder der frem en række af granitiske toppe, der stiger op om den øvre del af Gjerdalselven. Glimmerskiferen ligger her over indlandsgraniten, og strøgretningen bøjer sig i regelen efter granitfeltets grændselinje.

Den paa ridset afsatte skiferafdeling østenom granitdraget er afsat i henhold til de fra højfjeldet anstillede iagttagelser. Fra dette punkt saaes nemlig østover en række af lave aasdrag, der utvivlsomt maatte være byggede af skifer. Disse lagrækker her staa antagelig i umiddelbar forbindelse med lagrækker af glimmerskifer og sandstensagtig kvartsit, der langs rigsgrændsen indenfor Hellemobotten fandtes at afløse indlandsgraniten. Disse lagrækker, der overleje graniten under en strøgretning af  $160^{\circ}$  med  $45^{\circ}$  østligt eller sydøstligt fald, bygge herfra fjeldpartierne indover svensk side. Hvorvidt disse lagrækker indenfor sammenbundne dels ved et kalkholdigt dels ved et haardt skiferagtigt bindemiddel. De indkittede brudstykker ere ofte skarpkantede, hyppig ogsaa langagtig linseformige.

Hvorvidt dette breccieartede Konglomerat ligger over eller under skiferen kunde ikke ligefremt iagttages — paa forhaand er der mest grund til at forudsætte det sidste.

• Dette skiferparti tilligemed Øjnæsskavlens Konglomerat ligger lidt søndenfor den paa profilridset optrukne linje, — og er saaledes ikke angivet paa dette.

Et tredie parti af Balsfjordens skiferfelt træder frem i de

fra Øvre Vand — i Vattenbygden — stejlt opstigende og nøgne fjeldvægge langs den nordlige side af vandet til henimod Norddalen. Langs denne strækning sees stærkt foldede og pressede lagrækker af glimmerskifer, kvartsitisk skifer og haardskifer i vevling med baandstriber af hvid og rød kalk at danne et overordentlig pragtfuldt netværk. Øjet bliver ikke træt af paa denne lange strækning at følge disse fine i form og farve saa afvevlingsrige og dog saa regelmæssige tegninger, som saaledes træde frem opover fjeldvæggene. Der er alene paa et punkt inden landets nordlige strøg, at noget hertil svarende kan sees trædende frem — nemlig strax ved Bosekop i Alten. Henimod indbøjningen til Laxaa ved Norddalelvens udmunding gaar disse foldede lagrækker over i en konglomeratartet dannelse, der snart igjen afløses af stejlt og regelmæssig stillede lagrækker af glimmerskifer tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe.

At disse saa forunderlig foldede masser tilhører en gruppe, der er yngre end glimmerskifergruppen, derfor synes der at være al rimelighed, uagtet det indbyrdes lejningsforhold ikke er klart at aflæse. Konglomeratet, der minder om Øjskavlnessts konglomerat, synes at pege hen paa, at disse dannelser kunne være at sammenstilles under samme hovedgruppe.

Fra midten af Lang-vandet afløses Tromsø glimmerskifer af lagrækker, der i de dybeste partier langs vandet dannes af glindsende glimmerskifer, tyndlaget kvartsitisk glimmerskifer i oftest smuk regelmæssig lagstilling med svagt fald — lagstillingen oftest svævende. Højere op over fjeldmassen til Lommi-javre dannes bjergarten af mild glindsende lerglimmerskifer og sort lerskifer i vevling med mild kloritisk grønlig skifer med udsondringer og nyrer af kvarts og brunlig kalkspatk. Opover højfjeldet er faldet svagt ( $15^{\circ}$ ) nordvestligt.

Disse lagrækker overleje Tromsø glimmerskifer og indordnes her foreløbig under Balsfjordens skiferafdeling. De synes fremdes at udbrede sig over fjeldmassen syd om Langvandet. Søndre Sulitelma, der stiger op umiddelbart fra Lommi-javres

nordside er et godt stykke opover bygget af de samme lagrækker, medens de egentlige Sulitelma-toppe antagelig ere byggede af krystallinske skifere — maaske som før nævnt gjennemsatte af gabbroartede eller dioritiske partier.

At slutte fra optegnelserne i Gæa kan der være nogen sandsynlighed for at forudsætte, at afdelinger, der ere at parallelisere med den her omhandlede skiferafdeling ved Langvandet og Lommijavre, optræder i mer og mindre mægtige partier over Kjøldraget sydigjennem Helgeland. Muligens kunne disse afdelinger blive at indordne under en af de trondhjemske skiferafdelinger. Hellemobotten er at indordne under Tromsø glimmerskifer, eller om de muligens skulle tilhøre en yngre gruppe maa indtil videre lades uafgjort. Jeg er foreløbig mest tilbøjelig til at holde paa den første forudsætning.

Fra bunden af den lille Tysfjord (se profilrids fig. 3) opover Kjøldragets højdepunkt her (4580') bygges fjeldpartierne af glimmerskifer med sparsomme indlejninger af kalksten. Strøgetningen er her adskillig variabel, men nærmer sig i regelen til omkring øst-vestlig med sydligt fald. Ogsaa kulstofholdige skifere (sorte skifere med sort streg) ere bemærkede. Dette højfjeld stiger op strax nordenfor kjølgranitens grændselinje mod nord, men rejser sig indtil et par tusinde fod højere end dette.

### 3. Balsfjordens skifergruppe

træder frem paa tre forskellige punkter efter profilridset fig. 1.

Det vestligste parti bygger her de lavere aasdrag langs Salten i strøget fra gaarden Jensvold — noget indenfor Bodø kirke — østover forbi Kvalvaag og Vikan ind imod bunden af Hopen.

Lagrækkerne her dannes af mild glimmerskifer, lerglimmerskifer og glindsende skifer med milde sorte kulstofholdige skifere med sort streg.

Strøgetningen er her oftest  $60^\circ$  med afbøjning til øst faldet nordvestligt til nordligt.

Skiferlagene her findes hyppigt gjennemsatte af granitisk gangpartier, der stryge paa det nærmeste lodret mod skiferens strøgetning, altsaa nogenlunde i nordsydlig retning. Lidt indenfor gaarden Vikan sees to parallelt løbende granitiske gange, af hvilke den ene spænder sig helt fra stranden henover under landet og derfra opover hele afhængen af det herfra stigende omkring 800' høje aasdrag.

Den granitiske gangsten skyder oftere op over skiferlagene men viser sig her hyppig overtrukket med et tyndere overdrag af uforandret skifersubstans. Rimeligvis maa den her tidligere gangene have været overdækket med skiferlag.

Over den lille fremspringende halvø, der fra Fuske kirke skyder sig sydover mellem Fuskevaag og Klungsetvik, dannes den faste bjerggrund af regelmæssig paa hinanden følgende lagrækker, der vise en strøgetning af  $50$  à  $60^\circ$  med nordvestlig fald. Over et profil fra Fuskevaag til Klungsetvik dannes lagrækken nedenfra opad af

- a) tyndlaget grovkornig blaalig kalksten i mægtige masser. Kalkstenen er ofte indflettet med lameller af en lerskiferagtig sort glindsende skifer (tildels indfældt med haard grafit),
- b) derover lagrækker af glindsende skifer i veksling med kvartsskifer (sandstenagtig kvartsit), der navnlig træder frem langs Klungsetviken. Skiferen viser sig her smukt flammet og indeslutter hyppige nyreformige og knolleformige brudstykker og udsondringer af kvarts, kvartsit og rødlig kalksten. Den træder saaledes frem med et halvt breccieartet præg. Skiferen viser sig her paa en vis maade som en forløber for en mægtig halvt breccie- halvt konglomeratartet dannelse, der træder frem over halvøens længst fremskydende parti, — det saakaldte Øjskavnesneset, der her skyder op i en omkring 100' høj aas, der fra stranden op



over bygget af større og mindre brudstykker af kvarts og oftest rødlig kalksten.

#### 4. Kjelgraniten

bygger et anseeligt sammenhængende felt, der mod syd tager sin begyndelse omkring Strøms- og Ankilvandene — ved bunden af Sørfolden — og herfra breder sig ud i nordlig retning langs Kjeldragets vestlige afhæng op til bunden af Mandfjord — en af Tysfjordens sidefjorde. Ved Ankilvandet skyder graniten frem som en smal afsluttende kile, der imidlertid snart voxer i brede østover, saa den fra bunden af Lørfjorden og nordover til feltets afslutning — enkelte indskaarne skiferlige fraregnede — bygger den hele fjeldgrund fra Kjeldragets vestlige afhæng indtil rigegrænsen. Granitdraget har saaledes en længdeudstrækning fra nord mod syd af omkring 7 norske mil med en gennemsnitlig brede af omkring 3 mil.

Den her frembrydende granitiske bjergart viser i regelen en stærkt fremtrædende graalighvid grundfarve. Den dannes af hvidlig orthoklos, gennemsigtig kvarts og sort magnesiaglimmer. Glimmeren findes oftest samlet i større og mindre flag og som saadanne enten stribevis eller mere uregelmæssig fordelte om i grundmassen.

Kjelgraniten stiger langs vestranden hyppigst op i nægne og stejle fjeldvægge. Højfjeldet afsluttes her sjeldnere i spidser og tinder, hyppigst derimod i mere mildt formede koller og bølgeformige rygge.

Bjergarten træder kun sjeldnere frem som renere granit — i regelen er den at paavise i en bestemt fremtrædende parallelstruktur, og ikke saa sjeldent gaar den over til renere gneis.

Efter profilridset fig. 2 træder Kjelgraniten frem over det omkring 1600 fod høje fjelddrag, der stiger op mellem Makejdet og Sagelvdal. Over fjeldhøiden her er graniten temmelig gneisartet og gennem sættes hyppig af kvartsejer af indtil 1 fods mægtighed.

Langs granitfeltets vestside bryder den massive bjergart frem af glimmerskifergruppen, hvis lagrækker her i regelen viser en strøgetning parallel granitdragets grændselinje med et oftest stejlt til vertikalt fald — snart fra graniten men snart ogsaa med indskyden ind under denne.

Langs den sydligst fremspringende granitiske kile ved Ankilvandet skyder saaledes glimmerskifer ved vestsiden med stejlt østligt fald ind under graniten. Fra Ankilvandet stiger graniten i stejle styrtninger op til en højde af mellem 2 à 3000 fod. Men allerede nede fra vandet sees en brem af skiferlag over fjeldmassens højeste parti at ligge over graniten. Grændsen mellem granit og skifer er her klart aftegnet. Stiger man op over højfjeldet, saa finder man her disse øverste skiferpartier dannede af glimmerskifer og kvartsitisk skifer, der her viser en nord-sydlig strøgetning med østligt fald. Disse lagrækker tilhører antagelig Tromsø glimmerskifergruppe<sup>1)</sup>, og i saa tilfælde stikker graniten altsaa her frem som et mægtigt leje inden glimmerskiferen.

Glimmerskiferens lagstilling synes i det hele og store at bøje sig efter granitdragets grændselinjer. Dette forhold kan synes at skulle støtte en forudsætning om Kjelgranitens eruptive oprindelse. Paa den anden side er der imidlertid ogsaa forskellige forholde at aflæse, der kunne pege hen paa at den inden skifergruppen raadende lagstilling ikke kan være at tilskrive frembrudet af eruptionsmasser. Disse forholde er nærmere omhandlede paa et andet sted<sup>2)</sup>, hvortil der i saa henseende her skal henvises. Ligesom der saaledes paa den ene side af den langs granitdragets grændsestrøg raadende lagstilling inden skiferafdelingen ikke antages at være nogen fuld berettigelse til deraf at drage slutninger om Kjelgranitens eruptive oprindelse, saa skal det paa den anden side ogsaa kunne frem-

<sup>1)</sup> Forholdet i saa henseende vil dog først kunne udredes med fald bestemt ved at udstrække undersøgelserne ind over svensk Lapmark.

<sup>2)</sup> „Saltens Orografi“.

holdes, at Kjelgraniten, hvad enten man ser hen til bjergartens petrografiske egenskaber eller til de inden feltet raadende struktur- og bygningsforholde i det hele og store, ganske synes at maatte blive at sammenstille med kyststrækningens gneisgranit.

Profilrids fig. 5, der er trukket i vest-østlig retning fra Sagfjord over Hellemofjord til rigsgrænsen mellem grændserene 250 og 249, vil maaske tjene til at kaste noget lys over Kjelgranitens forhold til kystens gneisgranit.

- a) Gneis-granit.
- b) Ved Hellemofjordens indre afbøjning i sydøstlig retning — transversenfor Musken — afløses gneisgraniten af lagrækker af glimmerskifer, der med en strøgetning af 30 å 40° viser et østligt fald af 50 å 60°. Den i dagen ofte stærkt brunrøde skifer indeslutter mægtige lag af kornig kalksten. To saadane kalkzoner findes angivne paa ridset.
- c) I nærheden af den fra Hellemofjorden mod nord indskydende Nordfjord afløses skiferafdelingen — der her følges i en strækning af nær en halv mil — af Kjelgraniten, der herfra fortsætter i sammenhæng indtil henimod rigsgrænsen, hvor den igjen afløses af de før omhandlede
- d) lagrækker af glimmerskifer, kvartsitisk skifer og sandstenagtig kvartsit, der viser en strøgetning af 160° med 40° østligt fald.

Det orografiske knudepunkt (centralpunkt) for kyststrækningens gneis-granit er som vist paa et andet sted<sup>1)</sup> at søge over den sydlige del af den store Hindø om bunden af Øgefjord, hvor gneis-graniten i Møsadlen stiger op til sin største højde. Skulde Kjelgraniten altsaa være at indordne under gneisgraniten, saa skyder dette felt fra Hindøen sydover i to

<sup>1)</sup> „De gneis-granitiske dannelser langs det nordlige Norges kyststrøg.“

hovedforgreninger — den ene i sydvestlig retning nedover Lofotens søer den anden over Tysfjorden i sydlig eller sydøstlig retning ned mod Vallenbygden i Skjærstad.

24de Marts 1876.

---

## OM KLORMLÆNGDEN I NORDSØEN, ATLANTER- HAVET OG DAVISSTRÆDET

AF

AMUND HELLAND.

---

Ved Titration med salpetersurt Sælvoxyd og med kromsurt Kali som Indicator efter Mohrs Methode lader Klormængden i Havvandet sig bestemme hurtigt og sikkert. De i det følgende anførte Bestemmelser af Klormængden i Nordsøen, Atlanterhavet og Davisstrædet er foretagne efter denne Methode paa en Reise til og fra Grønland. Til Titrationen er benyttet en Sælvopløsning af saadan Styrke, at 1 CC af Opløsningen svarer omtrent til 1 CC af Havvand i Atlanterhavet. Herved opnaar man særdeles skarpe Reaktionen, og tillige undgaar man Brugen af destilleret Vand. Man bør ved Titrationen benytte Byretter, der rummer mindst 10 CC, og som tillader at aflæse med en Nøjagtighed af  $\frac{1}{100}$  CC. Naar man mod Slutningen af Titrationen gjentagne Gange gaar frem og tilbage omkring Neutralisationspunktet, altsaa farver og affarver ved Tilsætning af Sælvopløsningen og af Havvandet, saa har man en hel Række af Aflæsninger, hvorefter man kan tage Middeltallet. Skruer man det Stativ, hvorefter Byretterne staar, fast til Bordet, da kan man selv i heftige Storme udføre Titrationen nøjagtigt. Man kan kontrollere de Forandringer, som Sælvopløsningen maatte undergaa paa Reisen, ved hyppigt at sammenligne den med en eller flere medbragte Saltopløsninger af bekjendt Ge-

halt, eller ved at medtage nogle vel forseglede Prøver af Havvandet, hvis Gehalt da senere kan prøves ved Kontrolanalyser.

Titreringen giver Klormængden i 10 CC Havvand. I det følgende er Mængden af Klor i 10 CC omgjort til Procenter.

I de følgende Tabeller er foruden Stedet, hvor Prøverne er tagne, angivet Havets Temperatur, Klormængden i Procenter samt i Davisstrædet og i den østgrønlandske Strøm tillige om Isbjerge eller Drivis svømmede i det Hav, hvorafr Prøver toges. Det vil blandt andet sees af Tallene, at Maximum af Saltgehalt i Atlanterhavet paa en Bredde af mellem 59 og 60° ligger 5 til 7° V fr. Gr., og at Maximum af Temperatur i September Maaned falder sammen med Maximum af Saltmængde. Videre sees det, at Overgangen fra Golfstrømmen til den østgrønlandske Strøm gav sig tilkjende ved Synken af Temperaturen og ved Aftagen i Saltgehalten.

Prøverne er tagne omtrent 1 Fod under Overfladen.

**Klormængden i Nordseen, Atlanterhavet og Davisstrædet.**

Datum 1875.	Sted.		Havets Temperatur C.	Klormængde i Procenter.	Anmærkning.
	Bredde.	Længde.			

**I. I Kattegat:**

April

17	Øresund nær Kronborg	4.1	0.530
17	ca. 1 Mil VSV for Kullen	4.8	1.093
18	ca. 1 Mil Ø for Trindelen	5.3	1.344
18	ca. 1 Mil N. for Trindelen	5.4	1.401
19	ca. 3 Mil SO for Skagen	5.8	1.484
19	ca. 3 Mil OSO for Skagen	6.1	1.779
20	ca. 2 Mil O for Skagen	5.8	1.768
20	58° 8' NB. 10° 51' Ø f. Gr.	6.3	1.450

**II. I Skagerrak:**

20	ca. 4½ Mil S for Jomfrul. Fyr	—	1.670
21	ca. 1½ Mil S for Torungen Fyr	5.1	1.676
21	ca. 2 Mil SO for Grimstad	5.3	1.676
21	58° 0' NB. 9° 5' Ø f. Gr.	5.4	1.707
22	57° 33' — 8° 0' —	4.8	1.806
22	57° 37' — 8° 0' —	5.1	1.770
22	ca. 2 Mil SV for Oxe Fyr	4.6	1.824
23	ca. 3 Mil S for Oxe Fyr	4.5	1.709
23	ca. 2 Mil S for Oxe Fyr	4.5	1.722
24	57° 39' 6° 46'	5.1	1.891

**III. I Nordseen:**

24	ca. 1½ Mil V for Lindesnes	5.6	1.926	Regn.
24	ca. 3 Mil VSV for Lindesnes	5.1	1.876	
25	57° 33' NB. 6° 32' Ø f. Gr.	5.3	1.893	
25	57° 45' — 6° 27' —	5.3	1.883	
25	ca. 2½ Mil V for Lindesnes	—	1.912	
26	57° 31' NB. 6° 20' Ø f. Gr.	5.4	1.830	
26	57° 26' — 6° 10' —	6.3	1.865	

232 Om Klormængden i Nordøen, Atlanterhavet og Davisstrødet.

Datum 1875.	Sted.		Havets Temperat. C.	Klormængde i Procenter.	Anmærkning.
	Bredde.	Længde.			
27	57° 36' NB.	5° 0' Ø f. Gr.	5.9	1.857	
27	57° 45' —	4° 24' —	6.9	1.927	Regn.
28	57° 52' —	3° 38' —	6.6	1.903	
28	57° 55' —	3° 24' —	6.9	1.935	
29	58° 10' —	2° 27' —	6.4	1.951	Regn.
29	58° 23' —	2° 29' —	6.6	1.948	
30	58° 46' —	2° 5' —	6.4	1.942	
30	58° 51' —	1° 46' V f. Gr.	6.6	1.944	
Mai					
1	ca. 8 Mil SO for Fairhill		7.1	1.947	
1	ca. 4 Mil SO for Fairhill		7.1	1.957	
1	ca. 2½ Mil OSO for Fairhill		7.1	1.952	
1	ca. ¼ Mil NO for Fairhill		7.9	1.947	

IV. I Atlanterhavet.

a. Golfstrømmen.

1	ca. 3½ Mil VNV for Fairhill		7.8	1.940	
1	59° 42' NB.	3° 14' V f. Gr.	—	1.934	
2	59° 47' —	5° 30' —	9.6	1.959	
2	59° 46' —	6° 0' —	10.1	1.958	
3	59° 52' —	8° 46' —	9.7	1.953	Regn.
3	59° 53' —	10° 12' —	10.0	1.952	Regn.
4	59° 56' —	11° 28' —	9.9	1.952	
4	59° 43' —	11° 33' —	9.9	1.952	
5	59° 28' —	11° 52' —	9.9	1.950	
5	59° 30' —	12° 52' —	10.3	1.956	
6	59° 30' —	16° 10' —	10.5	1.956	
6	59° 29' —	18° 10' —	10.8	1.950	
7	59° 27' —	19° 32' —	10.8	1.952	
7	59° 30' —	20° 20' —	10.5	1.950	Regn.
8	59° 36' —	22° 13' —	10.4	1.949	



Datum 1875.	Sted.		Havets Temperatur C.	Klormængde i Procent.	Anmærkning.
	Bredde.	Længde.			
8	59° 35' NB.	22° 33' V f. Gr.	10.5	1.950	
9	58° 42' —	22° 36' —	10.5	1.951	
9	58° 34' —	22° 36' —	10.4	1.950	
10	58° 40' —	22° 21' —	9.7	1.946	Regn.
10	58° 49' —	22° 56' —	10.5	1.954	Regn.
11	58° 23' —	24° 19' —	10.0	1.942	Regn.
11	58° 27' —	24° 35' —	10.0	1.951	
12	58° 47' —	25° 39' —	9.7	1.950	
12	58° 37' —	25° 39' —	9.7	1.950	
13	58° 45' —	25° 13' —	9.7	1.954	Regn.
13	58° 44' —	25° 12' —	9.6	1.952	
14	59° 22' —	25° 11' —	9.4	1.952	Regn.
14	59° 16' —	25° 15' —	9.6	1.950	
15	58° 47' —	25° 16' —	9.8	1.954	
15	58° 56' —	26° 16' —	9.8	1.950	Regn.
16	59° 7' —	26° 30' —	9.6	1.952	
16	59° 12' —	26° 47' —	9.4	1.950	
17	58° 36' —	27° 20' —	9.4	1.948	
17	58° 30' —	27° 29' —	9.8	1.952	
18	57° 45' —	28° 27' —	8.8	1.950	
18	57° 33' —	28° 32' —	9.0	1.950	
19	57° 34' —	29° 11' —	8.8	1.950	
19	57° 47' —	29° 10' —	8.8	1.950	
20	58° 28' —	28° 57' —	8.9	1.952	Hagl.
20	58° 33' —	28° 59' —	9.0	1.950	
21	58° 2' —	29° 16' —	8.9	1.952	
21	57° 53' —	29° 20' —	8.8	1.946	Regn.
22	57° 10' —	28° 2' —	8.9	1.945	Regn.
22	57° 5' —	28° 50' —	8.5	1.945	
23	57° 3' —	28° 27' —	8.5	1.945	

234 Om Klormsængden i Nordøsen, Atlanterhavet og Davisstrædet.

Datum 1875.	Sted.		Havets Temperatur C.	Klormsængde i Procenter.	Anmærkning.
	Bredde.	Længde.			
23	57° 4' NB.	28° 28' V f. Gr.	8.6	1.945	Regn.
24	56° 39' —	29° 37' —	9.0	1.945	
24	56° 48' —	29° 42' —	8.8	1.940	
25	57° 20' —	30° 51' —	8.8	1.940	
25	57° 20' —	32° 16' —	8.4	1.943	
25	57° 21' —	33° 32' —	—	1.940	
26	57° 25' —	34° 56' —	7.5	1.938	
26	57° 47' —	36° 3' —	6.6	1.930	
27	58° 4' —	38° 6' —	5.9	1.930	
27	58° 10' —	39° 5' —	5.9	1.932	

V. I Atlanterhavet.

b. I den østgrønlandske Strøm.

27	58° 12' NB.	40° 10' V f. Gr.	—	1.908	Indfald i Sigte Do.
28	58° 14' —	41° 29' —	4.3	1.903	
28	58° 14' —	41° 55' —	5.0	1.917	
28	58° 14' —	42° 3' —	5.0	1.909	
28	58° 14' —	42° 15' —	4.5	1.897	
28	58° 16' —	44° 4' —	—	1.897	
29	58° 15' —	44° 19' —	4.1	1.887	
29	58° 37' —	44° 39' —	3.4	1.864	
29	58° 30' —	44° 56' —	—	1.895	
30	58° 25' —	45° 34' —	3.8	1.879	
30	58° 32' —	45° 41' —	4.5	1.883	
30	58° 44' —	46° 42' —	—	1.906	
31	59° 10' —	47° 39' —	3.0	1.881	
31	59° 12' —	47° 50' —	3.1	1.877	
31	59° 17' —	47° 51' —	3.4	1.872	

Datum 1875.	Sted.		Havets Temperatur C.	Klornægte i Procenter.	Anmærkning.
	Bredde.	Længde.			

## VL. I Davisstrædet:

Juni					
1	59° 44' NB.	48° 30' V f. Gr.	3.3	1.878	Isfjeld i Sigte.
1	59° 52' —	48° 46' —	3.3	1.869	Do.
1	60° 0' —	50° 48' —	—	1.863	
2	60° 17' —	50° 44' —	2.0	1.851	Isfjeld og Drivis i Sigte.
2	60° 39' —	49° 49' —	2.0	1.838	Do.
2	60° 26' —	50° 9' —	2.0	1.847	Isfjeld i Sigte nær
2	60° 25' —	50° 19' —	2.0	1.854	Kanten af Drivisen.
2	60° 23' —	50° 42' —	—	1.849	
3	60° 27' —	50° 40' —	2.1	1.855	
3	60° 39' —	50° 25' —	2.6	1.854	
4	61° 6' —	51° 6' —	2.7	1.863	Isfjeld i Sigte-
4	61° 11' —	51° 24' —	3.3	1.851	Do.
5	61° 36' —	51° 50' —	3.3	1.851	Do.
5	61° 53' —	51° 34' —	3.4	1.868	
5	62° 6' —	51° 0' —	1.8	1.833	Mellem 7 Isfjeld.
6	62° 4' —	52° 8' —	—	1.840	Isfjeld i Sigte. Fre-
6	62° 21' —	51° 45' —	2.1	1.847	drikshaabs Isbrø 8 Mil
6	62° 38' —	51° 33' —	1.8	1.838	i Øst, 4 Mil fra Ravnas
7	62° 55' —	52° 33' —	2.0	1.851	Store.
7	63° 6' —	53° 35' —	2.3	1.856	
7	63° 36' —	52° 58' —	—	1.860	
8	63° 41' —	53° 4' —	1.6	1.862	
8	64° 21' —	53° 54' —	2.0	1.861	
8	64° 43' —	54° 24' —	2.4	1.860	Isfjeld i Sigte.
9	65° 0' —	54° 41' —	2.4	1.867	Sne
9	65° 7' —	54° 45' —	4.0	1.879	
10	65° 42' —	55° 3' —	2.8	1.880	
10	65° 48' —	56° 3' —	0.4	1.869	

Datum 1875.	Sted.		Havets Temperatur C.	Klormængde i Procenter.	Anmærkning.
	Bredde.	Længde.			
10	65° 58' NB.	55° 21' V f. Gr.	1.3	1.865	
11	66° 25' —	59° 56' —	1.0	1.871	
11	66° 31' —	55° 0' —	0.9	1.871	
12	66° 35' —	54° 29' —	1.7	1.872	Sne.
12	66° 23' —	54° 55' —	0.9	1.871	Sne. Isfjeld i Sigto.
13	66° 45' —	54° 53' —	0.9	1.863	Do.
13	66° 48' —	55° 12' —	1.6	1.878	Isfjeld i Sigto.
14	67° 40' —	55° 36' —	0.9	1.863	Do.
14	68° 2' —	55° 42' —	0.7	1.853	Mellem 35 Isfjeld.
14	68° 11' —	55° 42' —	0.6	1.855	Mellem 14 Isfjeld. Bif. kol 5 Mil af.
15	ca. 2 Mil NNO for Vester Eiland		1.3	1.855	

## VII. I Diskobugten:

15	Mellem Hunde Eiland og Manetsok	2.3	1.856	
15	ca. 2 Mil Øst for Hunde Eiland	2.0	1.843	
15	ca. 1½ Mil Nord for Grønne Eiland	1.8	1.827	
16	Ved Øen Angisok 1 Mil fra Egedesminde	1.8	1.882	
Juli				
13		4.9	1.804	
13		0.5	1.823	
13		0.5	1.809	
13	Foran Munden af Ja- kobshavns Isfjord paa	0.9	1.813	Foran Kanten af de fra
13	Veien fra Klaushavn til	5.0	1.744	Jakobshavns Isfjord
13		1.1	1.813	udskydende Isfjeld.
13	Jakobshavn	3.1	1.809	
13		1.9	1.782	
13		4.1	1.780	

Datum 1875.	Sted.		Havets Temperatur C.	Klormængde i Procenter.	Anmærkning.
	Bredde.	Længde.			
6	Ved Kaja i Jakobshavns Isfjord		—	1.602	Nær Land i den af Isfjelde opfyldte Fjord. Stærk Strøm.
7	I Tassiusak, Bifjord til Ja- kobshavns Isfjord		3.0	1.411	

## VIII. I Umanaksfjorden:

August	4	Nær Umanaks Havn	—	1.684	Isfjeld paa Fjorden.
	29	Mellem Ubekjendt Eiland og Niakornak	3.0	1.781	Do.

## IX. I Davisstrædet:

	29	ca. 2½ Mil NV for Noursuak	3.8	1.805	Isfjeld i Sigte.
	30	ca. 2½ Mil VNV for Mellem- fjorden paa Disko	5.1	1.831	
	31	ca. 4 Mil Vest for Rifkol	4.9	1.868	
Septbr.	1	65° 21' NB. 55° 49' V f. Gr.	3.3	1.833	
	2	65° 0' — 55° 45' —	4.5	1.839	
	3	63° 20' — 55° 33' —	5.8	1.870	
	4	60° 22' — 54° 30' —	6.9	1.880	

## X. I Atlanterhavet:

## a. I den østgrønlandske Strøm.

	5	58° 39' NB. 51° 20' V f. Gr.	8.0	1.904	Regn.
	6	57° 55' — 48° 47' —	9.0	1.916	
	7	57° 39' — 48° 37' —	8.5	1.916	
	8	57° 52' — 48° 51' —	8.5	1.918	
	9	57° 36' — 46° 19' —	8.3	1.914	
	10	56° 54' — 41° 34' —	8.0	1.924	
	11	57° 10' — 38° 44' —	9.1	1.924	

238 Om Klormængden i Nordsøen, Atlanterhavet og Davisstrædet.

Datum 1875.	Sted.		Havets Temperatur C.	Klormængde i Procenter.	Anmærkning.
	Bredde.	Længde.			

XI. I Atlanterhavet:

b. I Golfstrømmen.

12	57° 34' NB.	34° 4' V f. Gr.	10.3	1.941	Regn.
13	57° 56' —	30° 0' —	10.3	1.949	
14	57° 13' —	28° 42' —	12.4	1.951	
15	57° 54' —	27° 20' —	11.6	1.955	
16	58° 38' —	23° 8' —	12.8	1.955	
17	59° 30' —	18° 47' —	12.8	1.957	
18	59° 54' —	14° 16' —	12.9	1.959	
19	59° 40' —	10° 34' —	13.1	1.957	
20	59° 40' —	6° 19' —	13.1	1.960	
21	59° 45' —	6° 7' —	13.2	1.961	
22	59° 44' —	5° 4' —	13.0	1.957	
23	59° 33' —	3° 17' —	12.9	1.947	
24	59° 54' —	3° 35' —	12.5	1.947	
25	60° 15' —	4° 46' —	12.4	1.960	
26	60° 10' —	3° 41' —	12.4	1.955	
27	59° 49' —	2° 22' —	12.4	1.949	

XII. I Nordsøen:

28	57° 45' NB.	2° 18' Ø f. Gr.	13.2	1.945
----	-------------	-----------------	------	-------

## OM HYTTEPRODUKTET, STEN.

AF

E. MÜNSTER.

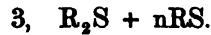
---

Det Hytteprodukt, man kalder Sten, spiller dels som et Koncentrations- og dels som et Ansamlingsmiddel en ikke ubetydelig Rolle ved flere metallurgiske Processer. Det indeholder foruden den væsentlige Bestanddel Svovl, der tillige giver Produktet dets Karakter, en Del Metaller, der kunne være Jern, Kobber, Bly, Nikkel, Kobolt, (Mangan), Zink, Sølv, Antimon, Arsenik, hvoraf en, to eller tre af de fire førstnævnte tilligemed Svovlet danner Hovedmassen, imedens de øvrige sex almindeligvis optræde underordnet. Er Kobber, Bly eller Nikkel et af de Metaller, som hovedsagelig senere af Stenen skal udvindes, benævner man den Kobber-, Bly- eller Nikkelsten. Ofte er Jernet meget forherskende i dette Smelteprodukt, og navnlig gjelder det altid om den Sten, som man med Hensigt fremstiller, for deri at koncentrere en ringe Selvegehalt af fattige Selvealiger, og som man fortrinsvis kalder Raasten, imedens ogsaa denne Benævnelse, dog hyppigere Skjærsten, bruges om det svovlede Hytteprodukt, som man umiddelbart erholder ved svovlede Ertzers Forsmeltning.

Uagtet Stenen ofte har været Gjenstand for Undersøgelse, har man dog hidtil ikke kunnet give en fyldestgørende Forklaring over dens Sammensætning. Grunden hertil er den, at Svovlet, som de kemiske Analyser vise, i en stor Klasse af

Stene optræde i en for utilstrækkelig Mængde til paa en Gang med Kobber at danne Halvsulfuret og med de øvrige Metaller Jern, Nikkel, Bly o. s. v. Sulfureter.

Bredberg (Pogg. Ann. Bind 27), som ved at beregne Atomforholdet imellem Svovl og Metallerne af Analyserne af flere, især Kobberstene, først blev opmærksom paa denne Kjendsgjerning, antager, at Metallerne Jern, Bly og Zink kunne optræde i Stenen baade som Sulfureter  $\text{FeS}$ ,  $\text{PbS}$  og  $\text{ZnS}$  og som Undersulfureter  $\text{Fe}_2\text{S}$ ,  $\text{Pb}_2\text{S}$  og  $\text{Zn}_2\text{S}$  og at Sulfureterne med Undersulfureterne danne saltlignende Forbindelser. Han adskiller 3 Klasser af Stene:



Som Støtte for Existensen af Undersulfureter anfører han Arfvedsons Forsøg ved Hjælp af Vandstofgas (Pogg. Ann. Bind 1) at reducere vandfrit svovlsurt Jernoxydul, hvorved  $\text{Fe}_2\text{S}$  skulde være fremkommet, og sit eget Forsøg, hvorved han ved at smelte sammen 25 Dele Blyglanspulver og 21 Dele Kornbly skulde have erholdt  $\text{Pb}_2\text{S}$ .

Rammelsberg anser Stenene, da samtlige elektropositive Svovlmetaller ere isomorfe, for at være isomorfe Blandinger af Svovlmetaller og holder det ikke for usandsynligt, at foruden  $\text{Cu}_2\text{S}$  ogsaa andre Halvsulfureter, som man kan forudsætte i Stenene, ere isomorfe med Sulfureterne.

Efter de forhaandenværende Analyser, deres Rigtighed forudsat, adskiller han Stenene i tvende Klasser:

1. saadanne, som indeholde saameget Svovl, at Kobberet kan være forhaanden som Halvsulfuret, de øvrige Metaller (Jern, Bly) som Sulfureter,
2. saadanne, som indeholde mindre Svovl end der svarer til denne Antagelse.

Disse tvende Opfattelser af Stenenes Sammensætning, hvoraf man fra et kemisk Standpunkt ubetinget maa give den



sidste Fortrinet, er naturligvis bygget paa Forudsætningen om, at Stenene ere ensartede kemiske Legemer. Vel har man ikke været uopmærksom paa, at Metallerne Bly (Rammelsberg) og Kobber (længe bekendt) mekanisk kunne være indlemmede i Stenen, dog synes det, at man i det Hele taget har anseet Produktet for homogent. Hvad egentlig Stapff mener med sin Yttring i Berg- und Hüttenmännische Zeitung 1859 S. 299 «Viele Erscheinungen beim Schmelzen deuten darauf hin, dass man Steine von der Zusammensetzung  $xR^2S + yRS$  (worin R hauptsächlich Eisen, Nickel, Zink, weniger Kupfer und nicht Blei) mit Recht als  $(x + y) RS + xR$  betrachten darf», er mig ikke klart, thi har en Sten Sammensætningen  $xR^2S + yRS$ , saa kan den ikke have Sammensætningen  $(x + y) RS + xR$  og omvendt.

Jeg vil her søge at vise, at den Betragtning, at Stenen er et homogent Legeme maaske kun undtagelsesvis er rigtig, og saaledes den kemiske Elementærsammensætning af Produktet ikke er ene afgjørende for dens Constitution. Det første, jeg i saa Henseende vil gjøre opmærksom paa, er hvad man med Øiet kan iagttage.

Slaar man dette Hytteprodukt itu, saa viser Bruddet, om dette end med Hensyn til Formen kan være forskjelligt, ikke nogen Uligeartethed i den sammenhængende Masse med Hensyn til Farve og Glands. Blærerum saavel store som og næsten mikroskopiske, dels tomme, dels gjennemsatte med Kobbertagger, enkelte Spring (fine Sprækker) med anløbne Sideflader høre jo til de meget hyppige Foreteelser ved Stenen, men en Uensartethed som hos en eller anden Bergart som Granit, Porfyr o. s. v. vil man ikke støde paa. Nogen Lighed har den med de i Naturen forekommende Svovlmetaller, men den hyppige Forekomst af Blærerum i den og dens lidet glindsende Brud gjør Ligheden ikke meget stor. Dog faar man ved at betragte den Indtrykket af, at man har for sig en ensartet Masse.

Fremstiller man derimod paa Stenen en mere eller mindre plan og om muligt helst poleret Flade som til Exempel ved fin Slibning, da vil denne Flade fremvise om ikke just for det blotte Øie saa dog for Lupen i de allerhyppigste Tilfælde uligeartede Dele.

For ved Exempler at bekræfte dette Faktum har jeg, paa Grund af Stenenes forskellige Sammensætning ikke alene hvaar angaar dem, der ere faldne fra forskellige Slags Smeltninger men ogsaa dem, man har erholdt fra samme Slags Smeltning om denne ogsaa er foretaget ved samme Hytteværk, fundet det nødvendigt at anvende noget større Udførlighed. Jeg vil derfor anføre en Række Exempler, da jeg har undersøgt alle de forskellige Haandstykker, der have staaet til min Raadighed. Hvad Forsøgene selv angaar bestode de deri, at jeg afslog et lille Bit af Haandstykket, slibte denne saa fint som muligt og betragtede derpaa den slebne Flade enten med enkelt eller dobbelt Lupe. I den følgende Fortegnelse er ogsaa opført et Par Nummere, som af en eller anden Grund ikke kunde slibes. Dette er skeet for en anden Undersøgelses Skyld.

### Røros.

1. Skjærsten, betegnet rig. Farven bronzegul. Bruddet finkornigt, temmelig oxyderet baade paa Overfladen og i det Indre, der er fuld af store Blærerum, tildels, men kun sparsomt besatte med nu oxyderet Kobber. Det slebne Stykke, der var af det tætteste Parti, viste ikke faa under 0.1 Millimeters Gjennemsnit smaa hvide metallisk glindsende Korn. Desuden var den øvrige Masse heller ikke ensartet, da man kunde skjelne imellem et Parti med en lysere bronze gul, et andet med en noget mørkere Farve.

2. Skjærsten, betegnet almindelig. Farven, Bruddet og Oxydationen som ved det første Stykke. Blærerummene smaa i den midterste Del med lidt Kobberuld i, større mod Overfladen. Slebet, særdeles smaa men tydelige baade hvide og

røde metallisk glindsende Korn. Mindre hvidt Metal end i foregaaende.

3. Skjærsten, ser omtrent ud som No. 2, ogsaa oxyderet. Kobber i Blærerummene ikke at iagttage. Slebet, baade hvide og røde Korn men færre af begge end i No. 2.

4. Sporsten. Farven graalig kobberød, Bruddet temmelig jevnt. Slebet, en kobberoxydulfarvet Bund med uregelmæssige Kobberkorn og med dels naaleformige dels fjærlignende, dels uregelmæssig formede indtil 1 Millimeter lange udskilte Jernpartikler, dog kun faa.

5. Sporsten en halv Tomme tyk Kage. Farven som broget Kobbererts men noget mørkere. Bruddet ujevnt, men nærmer sig det muslige og stærkt glindsende. Slebet, en kobberoxydulfarvet Bund; den slebne Overdel af Kagen faa Kobberkorn og særdeles smaa og utydelige Jernkorn, den slebne Side tydelige baade Jern- og Kobberkorn, der paa enkelte Steder gaa tildels over til hinanden eller ligge ved Siden af hinanden. Underdelen særdeles rig paa Kobberdele med cirkelformigt Gjennemsnit. Det synes ogsaa, at Jernet har udekilt sig paa samme Maade, men da er Gjennemsnittet meget lidet.

6. Sporsten. Farven mørk blygraa med et stærkt rødligt Skjær. Bruddet finkornigt. Faa Blærerum, nogle fyldte med Kobberuld. Slebet. Kobber tydeligt i tynde Traade og Korn. Jern ogsaa tydeligt, naar Fladen betragtes umiddelbart efter Slibningen, men Jerndelenes Begrænsning er paa enkelte Steder noget udvisket.

7. Sporsten. Farven som i No. 6, men noget mørkere og Bruddet som i No. 5. Slebet. Flere uregelmæssige Kobberkorn. Jern ogsaa tilstede, men kun i enkelte faa Korn, men tydeligt.

Nummerne 1—5 skriver sig fra Decenniet 1830—1840, 6 og 7 fra 1789.

**Kaafjordens Kobberværk (1855).**

8. Skjærsten. Prøvestykket aldeles grønt paa Overfladen. Farven broncegul med rødt Skjær. Bruddet noget krystallinisk. Slebet; hverken Kobber eller Jern at iagttage, derimod kan man skjelne imellem lysere og mørkere Dele; den laboriserer en Smule; nogle fyldte fine mørke Sprækker findes.

9. Hvidt Metal (white metal). Farven mørk blygraa med et ubetydeligt rødt Skjær; Bruddet musligt til splittrigt, glindsende, sprød. Paa Overfladen af Stykket udskilte Kobbertagger. Slebet; faa uregelmæssige Kobberkorn, desuden en Del yderst fine neppe synlige traadformige metalliske Partikler, hvis Farve kunde erkjendes at være hvid.

10. Purpur Metal. Farven mørk blygraa. Bruddet finkornigt, mildt at slaa paa, noget smidigt. Slebet; nogle faa udskilte Kobberkorn.

**Foldalen (1859).**

11. Skjærsten, betegnet fattig. Farven broncegul med et rødt Skjær, Bruddet storbladig krystallinisk i det midterste Parti; i flere Blærerum Kobberuld. Slebet, tydeligt udskilt Jern og lidt Kobber.

12. Skjærsten. Farven broncegul med et rødt Skjær, Bruddet finkornigt; fuld af mange meget smaa og ogsaa en Del noget større Blærerum. I kun faa af de sidste viste der sig noget Kobber. Slebet. Tydelig udskilt Jern og lidt Kobber, det første i særdeles fine Korn.

13. Kobbersten efter Flammeovns smeltning af Præcipitat (Sindings Methode). Ser aldeles ud og forholder sig som No. 10, dog lidt Kobber i Blærerummene, hvorefter der er nogle faa Slebet, udskilt lidt Kobber i Massen.

**Falun.**

14. Skjærsten. Farven broncegul med et rødt Skjær, Bruddet smaat kornigt. Flere Blærerum, men smaa og i kun

ganske faa af disse er der noget udskilt Kobber. Slebet, tydeligt udskilt Jern, enkelte af Jernpartiklerne har lidt Lighed med stjerneformige Snekrystaller. Kobber var ikke synligt.

15. Skjærsten, søileformig afsondret i en Sulunas. Seilerne imellem 2 à 3 Millimeter i Gjennemsnit. Med Hensyn til Afsondringen har den i det Smaa stor Lighed med Basaltens. Slebet, Farven imellem speisgul og broncegul, intet Synligt udskilt.

16. Trotsten efter Concentrationssmeltning. Farven mørk blygraa. Brud som No. 9. Den ene Flade af Stykket 90 Millimeter langt og 50 bredt, var overalt besat med Kobberuld. Der var Kobbertraade indtil 32 Millimeter lange. Slebet, intet Metal udskilt.

#### Swansea (H. H. Vivian, 1873).

17. Raasten (coarse metal). Farven mørk broncegul med et rødt Skjær, anløber strax. Bruddet finkornigt sandstensagtigt; gaar itu paa samme Maade som en løs Sandsten. Slebet, udskilt en stor Mængde yderst fine Kobberkorn (under 0.1 Millimeter i Gjennemsnit) især i Nærheden af en Side, der var styrknet i fri Luft. Forøvrigt erholdt man ved Slibningen ingen sammenhængende Flade men en, der saa ud som en slebet ufuldkomment sammenkittet Sandsten.

18. Raasten. Farven broncegul. Bruddet meget finkornigt; enkelte Blærerum med ganske lidt Kobber i. Slebet, flere men endnu finere Kobberpartikler. Den slebne Flade forholdt sig omtrent paa samme Maade som hos No. 17.

19. Raasten. Farve og Brud som hos No. 17. Slebet udskilt en Mængde fine Kobberpartikler. Den slebne Flade som hos No. 17.

#### Ringeriges Nikkelværk (1860).

20. Raasten. Farven mørk broncegul. Bruddet noget krystallinsk, fuld af Blærerum. Slebet, udskilt ikke lidet hvidt

Metal dels i enkeltvise Korn, dels i Korn, der ligge i Rader dels som fjærlignende Dele.

21. Raasten. Farven broncegul, rørformige Blærerum Slebet, meget udskilt hvidt Metal, dels i fjærlignende Naale og dels i uregelmæssige Korn.

22. Concentrationssten. Farven imellem broncegul og speisgul, dog maaske med noget rødt Skjær, anløber rødlig violet. Bruddet jævnt. Enkelte mindre Blærerum. Slebet udskilt meget hvidt Metal, hovedsaglig Naaleform (Gjennemsmittet). En enkelt fuldkommen retliniet Naal havde med en Tykkelse af 0.1 Millimeter en Længde af 9.0 Millimeter.

23. Garmetal. Farven lys speisgul med kanske lidt grønligt Skjær. Bruddet jævnt men noget splittrigt. Slebet udskilt hvidt Metal ligesom i Perlerader og i fjærlignende Dele. Man kan ogsaa skjelne et messinggult og et mørkere farvet Parti. Alle 3 Dele omtrent ligelig fordelt i Massen.

24. Kobbersten. Farven mørk graalig kobberrød. Bruddet kornigt. I de temmelig store Blærerum Kobberuld og nogle Lameller af et hvidt Metal. Slebet, udskilt hvidt Metal i lange Naale. Paa en Side, der var en Del af et meget stort Blærerum og blev plant afslebet, viste det hvide Metal sig i rigelig Mængde, og enkelte Korn havde et rektangulært Gjennemsnit. Ogsaa lidt Kobber.

25. Kobbersten. Farven som hos det foregaaende Stykke. Bruddet jævnt finkornigt. Blærerummene rørformige og mindre Slebet, enkelte til 6.0 Millimeter lange fine hvide Naale med 0.1 Millimeters Tykkelse.

### Klefva Nikkelværk.

26. Skjærsten. Farven broncegul. En Mængde større Blærerum. Slebet; mange udskilte smaa hvide Korn.

27. Concentrationssten. Farven imellem speisgul og broncegul. Bruddet ujevnt, tæt opfyldt med meget smaa Blærerum. Slebet, udskilt meget hvidt Metal. Foreøvrigt indeholdt

Massen et messinggult og et mørkere, ubestemmeligt farvet Parti. Alle 3 Dele optraadte omtrent i samme Mængde.

### **Espedalens nedlagte Værk.**

28. Nikkelsten i Pulverform. Angivet at holde 6.45 Procent Nikkel og 0.67 Procent Kobolt.

### **Kongsbergs Smeltehytte.**

29. Raasten (1849). Farven broncegul. Bruddet grovkornigt krystallinsk, enkelte Krystallflader blaalig anløbet. Slebet, mange smaa hvide Korn.

30. Raasten fra samme Udstik som No. 29. Farven broncegul, Bruddet jævnt finkornigt. Slebet, mange smaa hvide Korn.

31. Raasten (1872). Fra en af de øverste Kager i Stikdigelen. Farven broncegul, Bruddet grovkornigt krystallinsk og blaåt anløbet. Slebet, smaa hvide Korn.

32. Raasten fra samme Udstik som No. 31, men af Bundstykket i Stikken. Farven broncegul, Bruddet krystallinsk i det Store men finkornigt i det Smaa, noget smidigt, men var ikke vanskeligt at pulverisere. Slebet, i et Stykke er det udskilte hvide Metal i ligesaa stor Mængde forhaanden som den øvrige Del, i et andet er Metallet meget overveiende, uden at dog de enkelte Metalkorn naar et større Gjennemsnit end 0.1 Millimeter.

33. Tyndsten fra Selvsmeltningen (1849) en halv Tomme tyk Kage. Farven mørk blygraa med et rødt Skjær. Bruddet mushigt. Mange smaa Blærerum med lidt Kobber i. Flere smaa Kobberudvæxter paa Kagens Overdel. Slebet, Overdelen mange runde Kobberkorn og traadformige Dele. Siden temmelig fri derfor.

34. Tyndsten 1849 fra Smeltning af Kobbererts. En  $\frac{1}{2}$  Tomme tyk Kage. Farven som broget Kobbererts. Mange rørformige Blærerum. Slebet, smaa Kobberkorn saavel paa Over- som Underdelen og paa Siden.

**Altenau (1862).**

35. Sligblysten. Farven blygraa broncegul. Bruddet ligesom krystallinisk, skimrende, hydrerende fra metallisk Bly. Slebet, en Mængde smaa, meget fine Blypartikler.

36. Blysten fra første Stengjennemsætning. Farven broncegul. Bruddet som en finkornig Sandstens. Den er af en saa løs Beskaffenhed, at man ved Slibning ikke kan erholde nogen jevn Flade, da det kun er enkelte Korn, der antage nogen Glands.

37. Blysten fra anden Stengjennemsætning. Farven mørk broncegul. Bruddet finkornigt. Slebet, mange smaa udskilte glindsende Korn (Bly). Den øvrige Masse bestod af et lysere og et mørkere Parti omtrent i samme Mængde.

38. Krædkobbersten. Farven mørk graalig kobberød. Bruddet ujevnt, kun faa Blærerum. Slebet, nogle enkelte smaa Kobberkorn.

39. Røgsten. Farven broncegul. Bruddet finkornigt, forholder sig som en løs Sandsten og kan ikke slibes.

40. Anden Krædkobbersten. En halv Tomme tyk Kage. Farven mørk blygraa med et rødt Skjær. Bruddet musligt, ikke lidt glindsende, smaa Blærerum. Slebet: Overdelen ingen Kobberkorn, Siden kun faa, Underdelen mange runde.

41. Tredie Krædkobbersten. En halv Tomme tyk Kage. Farven mørk blygraa med et svagt rødt Skjær. Bruddet musligt, faa og smaa Blærerum. Slebet, kun faa smaa Kobberpartikler.

42. Fjerde Krædkobbersten. En halv Tomme tyk Kage. Farven mørk blygraa, en Mængde smaa Blærerum, hvori lidt Kobber. Slebet, kun ganske lidt Kobber.

43. Raasten. Skjærsten af Kobberkisarbejdet. Farve, Brud og Blærerum som hos No. 38. Slebet, udskilt ikke lidt hvidt Metal men i meget smaa Korn, ogsaa lidt Kobber.

44. Middelsten. En trediedels Tomme tyk Plade. Farven



mørk blygraa med et rødt Skjær. Bruddet usaligt. Faa og smaa Blærerum, flere næsten fyldte med Kobber, hvilket sidste ogsaa findes udskilt i Tagger baade paa Oversiden og Undersiden af Kagen. Slebet, udskilt Kobber især paa Overdelen, men ogsaa paa Siden og Underdelen baade i runde Korn og uregelmæssige Aarer.

45. Første Sporsten. En  $\frac{1}{4}$  Tomme tyk Kage. Farven mørk blygraa. Kobbertagge saavel paa Over- som Underdelen. Er gjennemsat med saamange rørformige Blærerum, at et Brud parallelt med Pladens Tykkelse faar nogen Lighed i Udseende med et kløvet Spanskrør. Slebet, udskilt Kobber især paa Overdelen.

46. Anden Sporsten. En lidt under  $\frac{1}{4}$  Tomme tyk Kage. Farven mørk blygraa. Tæt besat med Kobbertagger baade paa Overdelen og Underdelen af Kagen. Brud som No. 45. Slebet, udskilt lidt Kobber mest paa Overdelen.

47. Tyndsten. En lidt over  $\frac{1}{8}$  Tomme tyk Kage. Farven mørk blygraa. Brud som No. 45. Slebet, udskilt lidt Kobber paa Sidefladen.

Man ser af denne optisk-mekaniske Undersøgelse, at det er meget sjelden, at en Sten er saa ligeartet, at man ikke idetmindste med det bevæbnede Øie vil kunne adskille forskelligartede Dele i den. Af de 47 undersøgte Haandstykker er der kun to nemlig No. 15 og 16, hvis slebne Flader viste sig homogen. Dog er herved at mærke, at af No. 15 kunde der paa Grund af dens stænglige Afsondring og paa Grund af utilstrækkeligt Material ikke slibes en større Flade end af 3 Millimeters Længde og 2 Millimeters Bredde, og at den slebne Bit af No. 16 rigtignok fremviste en homogen Flade, imedens der dog som før bemærket paa andre Steder af Haandstykket var en rigelig Udskilning af Kobber. Hvad Nummerne 36 og 39 angaar, der begge havde et løst sandstensagtigt Brud, hvorved de bleve uskikkede til at slibes, saa synes det, at man af dette Strukturforhold maa drage den Slutning, at de ogsaa begge

bestode af uligartede Masser, thi ellers er det vanskeligt at forstaa, hvorledes helt op homogene Legemer skulde kunne styrkne til Stykker af løst sammenhængende Korn. I alle de øvrige Nummere med Forbigaaelse af No. 28, der var i Pulverform, findes der uden Undtagelse et eller andet Metal eller ogsaa to i mindre eller større Mængde udskilte, og man kan have en sikker Formodning om, at det er Metallerne Jern, Nikkel, Kobber og Bly, som optræde. At det lyse staalgraa Metal, som viser sig i de forskjellige Kobberstene, i hvis chemiske Sammensætning foruden Jern, saa lidet forekommer af noget andet lyst Metal, ogsaa er Jern kan man vel med temmelig Sikkerhed slutte. Derimod kan man ikke i de forskjellige Nikkelstene paa Forhaand afgjøre, om det udskilte staalgraa Metal er Nikkel, Jern eller en Combination af begge. Kobberet kan man ikke tage Feil af paa Grund af dets Farve, og hvad Blyet angaar, saa tror jeg med Sikkerhed at kunne paastaa dets Tilstedeværelse som Metal i de angivne Nummere, dels paa Grund af dets Farve og dels paa Grund af dets Væghed, da et enkelt noget større Korn med ligesaa megen Lethed kunde skjæres som Bly. Ved Metallernes Optræden som fine Korn i den øvrige Masse af Stenen faar denne i det Smaa en porfyragtig eller mandelstensagtig Struktur.

I 5 af Prøvestykkerne kunde man ogsaa iagttage forskjelligartede Dele, som ikke var Metaller. Saaledes i No. 1 rig Skjærsten Røros foruden hvidt Metal et broncegult og et mørkerefarvet Parti, No. 8 Skjærsten Kaafjorden et ren broncefarvet og et mørk rødlig broncegult (Farven forandres snart i Luften til metallisk chokoladefarvet), No. 23 Garmetal Ringeriget og No. 27 Concentrationsten Klefva, foruden rigeligt hvidt Metal et messinggult og et mørkerefarvet Parti og No. 37 Blysten af anden Stengjennemsætning foruden metallisk Bly et broncegult og et mørkere farvet Parti. No. 1 maa holde over 20 Procent Kobber, da almindelig Skjærsten holder over 19 Procent, No. 8 holder 33.2 Procent Kobber.

No. 23 over 20 Procent, No. 27 holder 27.2 Procent, og da No. 37 er en Sten, der er fremkommet efter en 2 Gange foretaget Smeltning efter forudgaaende Røstning, saa er det rimeligt, at dens Kobbergehalt maa være over 20 Procent. Det er derfor sandsynligt at antage, at de mærkere Partier i alle 5 Nummere er en paa Kobber meget rig Forbindelse omtrent som broget Kobbererts og at den bronze-gule i No. 1, No. 8 og No. 37 er væsentlig en Svovljernforbindelse og den messinggule i No. 23 og No. 27 væsentlig en Svovlnikkelforbindelse.

Jeg gaar dernæst over til at omhandle den fysiske Eiendommelighed ved Stenen, at den i mere eller mindre Grad er paramagnetisk. En Paavisning af dette Faktum sker simplest ved at pulverisere en ringe Qvantitet Sten, og lade Pulveret paavirkes af en Magnet; man vil da bemærke, at en større eller ringere Del deraf vil blive hængende ved Magneten. Da denne Egenskab ved Stenen er saa almindelig og staar i saa næie Forbindelse med og, som man senere vil faa at se, har en stor Betydning med Hensyn til Stenens Sammensætning, har jeg fundet det nødvendigt at underkaste den en noget næiere Undersøgelse.

Hvad der for dette Øiemeds Skyld er af Interesse at vide er Størrelsen af den paramagnetiske Kraft hos de forskjellige Stene. Da det vilde være uoverkommeligt for en Række af Forsøg til Kraftens Bestemmelse at give den faste Sten en vis ydre Form som til Exempel en Cylinder, et Parallelepiped o. s. v., har jeg valgt den Fremgangsmaade at anvende Stenen i Pulverform, hvorved som det synes den magnetiske Polaritet, som muligens kunde være tilstede hos Hytteproduktet, ikke vil kunne komme til at spille nogen Rolle. Jeg havde tænkt at betjene mig af en Coulombs Torsionsballance ved Udførelsen af disse Forsøg, men da det fysiske Kabinet ved Universitetet ikke er i Besiddelse af noget saadant brugbart Instrument, har jeg efter den da fungerende const. Professor A. Arntsens Raad benyttet en Tyngdeballance.

Ved Forsøgene anvendtes en ældre kemisk Vægt, som benyttet med Forsigtighed gav et Udslag til en Nøjagtighed af omtrent  $\frac{1}{3}$  Milligram. Paa den venstre Side af Vægtekassen umiddelbart ved Bunden blev anbragt en rektangulær Aabning hvis Midtpunkt laa i den forlængede Projektion af Vægtbjelken og hvis horizontale Sider havde en Længde af 30.9 Millimeter og vertikale Sider en Høide af 11.8 Millimeter eller rigtigere: Siderne vare saa store, at en magnetiseret parallelipipedisk Staalstav, hvis Længde var 235.0 Millimeter og hvis øvrige Dimensioner vare som anført, kunde med Lethed føres igjennem Aabningen. Udenfor Vægten var for Magneten anbragt et horizontalt Underlag, der laa i samme Niveau som den horizontale Vægtbund, saaledes, at Magneten dels kom til at hvile paa Vægtbunden og dels paa den udenfor Vægten anbragte Bank. Til Optagelsen af Pulveret tjente en lille Porcelainsskaal, hvis ydre Gjennemsnit var 20.0 Millimeter, indre Gjennemsnit 17.5 Millimeter og Høide 7.0 Millimeter, og fyldtes denne Skaal ganske med den pulveriserte Sten og stillede saaledes midt paa Vægtskaalen, at den plane afstrøgne Overflade af Pulveret efter Øiemaal kom til at staa horizontal. For at den lille Skaal med Pulveret bestandig kunde henstilles paa samme Sted paa Vægtskaalen, var paa Midten af denne ved Hjælp af en lille Smule smeltet Vox heftet fast et Glimmerblad, efterat der først paa dette ved Hjælp af Lak var taget et Aftryk af den nederste Del af det Ydre af Porcelainsskaalen. I den derved i Løkket frembragte Fordybning sættes nu stedse Skaalen under Forsøgene. Paa det udenfor Vægten anbragte Underlag, hvorpaa Magneten for største Parten kom til at hvile, var en Del af Magnetens Omrids ved Hjælp af fine Streger markeret, for at dens Leie med Lethed kunde gjenfindes. Dens Stilling valgtes saaledes, at Midtpunktet af Vægtskaalen og Midtpunktet af Magnetens Endeflade kom til at ligge i samme Vertikallinie og at Magnetens Axe kom til at ligge i et Vertikalplan igjennem de matematiske Vægtarme. Naar Ligevægt paa Vægtskaalen

ar tilveiebragt, var Overfladen af Magneten omtrent 12 Millimeter fjernet fra den nederste Del af Pulveret og 17.75 Millimeter fra den øverste Del. Da der ikke, naar Magneten var øliggende i sit Leie, var noget Jern i dens umiddelbare Nærhed, gav Vægten det samme Udslag enten Magneten var ilstede eller ei. Denne blev anbragt saaledes, at Nordpolen bestandig var beroende under Vægtskaalen. Da der viste sig nogen Forskel paa Magnetens Virkning enten dens ene eller anden Bredside laa øverst, toges altid to Veininger af Pulveret under Magnetens Indflydelse, en med den ene Bredside op, en anden med den anden. Forsøgene bleve nu anstillede saaledes. Den paa før angivne Maade med Pulveret fyldte Skaal, der var dækket med et tyndt Glimmerblad, blev først veiet for sig alene, efterat den Aabning, hvorigjennem Magneten kunde indstikkes, for Luftdragets Skyld ved Hjælp af en tætsluttende Kork var tillukket og derpaa den dobbelte Veining under Magnetens Indflydelse foretaget. Differentsten imellem Middeltallet af Resultaterne af de 2 sidste Veininger og Resultatet af den første var saaledes større eller mindre, eftersom Pulveret viste sig mere eller mindre paramagnetisk. Paa denne Maade kunde de forskjellige Stenes paramagnetiske Kraft sammenlignes. Det er Tyngden, som paa denne Maade modarbejder Magnetens Tiltrækning af Pulveret. Jo stærkere Magneten er, desto mere har ogsaa Tyngden at overvinde, og ved Anvendelsen af forskellige ulige stærke Magneter faar man ogsaa for samme Pulver forskellige Resultater. For nu ikke at binde disse Bestemmelser til en bestemt Magnet har jeg i Forbindelse med disse Forsøg ogsaa paa samme Maade bestemt den paramagnetiske Kraft hos blødt Jern i Form af Filspaan taget af en tyndere meget blød Jerntraad. Stenpulveret og Jernfilspaanet havde omtrent samme Føinhedsgrad. Reducerer man nu Forsøgene saaledes, som om der til alle var anvendt samme Vægt Sten og samme Vægt Jern, og anser man den Tillægs- vægt, som udfordredes for at tilveiebringe Ligevægt med Mag-

netens Tiltrækning af Jernfilspaanet, for 100 og dernæst reducerer de øvrige Tillægsvægter henhørende til de forskellige Stenpulvere til Procenter af Jernets Tillægsvægt, saa har man Bestemmelser, der ere blevne uafhængige af den anvendte Magnet, og henførte til Dele af Jernets Paramagnetisme. Saaledes ere efterfølgende Udtryk fundne og beregnede. Et Exempel vil vise Fremgangsmaaden og vælges hertil No. 29 krystallinisk Raasten fra Kongsberg. Det til Forsøget anvendte Pulver veiede 2.6933 Gram. Ved Magnetens Indvirkning forøgedes Vægten med den ene Bredside op til 2.7148 Gram, med den anden til 2.7158 eller i Middel 2.7153 Gram. Man havde altsaa maattet belaste Vægten med 22 Milligram for under Magnetens Tilstedeværelse atter at tilveiebringe Ligevægten. Af Jernfilspaan indveiedes 2.4508 Gram og forøgedes Vægten med Magneten lagt under i Middel til 2.5608 Gram, altsaa en Differents af 0.1100 Gram. 2.6933 Gram Jernfilspaan eller samme Vægt som det anvendte Raastenspulver vilde have bevirket en Forøgelse af 0.1208 Gram. Men 0.0220 Gram er 18.20 Procent af 0.1208 Gram. De i de følgende Tabeller anførte Tal for Paramagnetismen hos de før optisk undersøgte 47 forskellige Stene betegne altsaa hvormange Procentdele de er af Jernets Paramagnetisme, naar de ere henførte til samme Vægt som dette Metal. I Tabel I er Stenene opstillede i den før anvendte Orden; i Tab. II efter Paramagnetismens Størrelse samt tilføiet for en bedre Oversigts Skyld hvilken Sort og fra hvilket Sted. Desuden angiver en Rubrik hvilke udskilte Metaller have været synlige, og i de, hvor Jern og Nikkel i metallisk Tilstand optræde, er der ogsaa med Udeladelse af No. 32 tilføiet et af Tallene 1, 2, 3...10 for at betegne forholdsviis Mængden af det udskilte hvide Metal (Jern, Nikkel). At denne Værdsættelse ikke kan gjøre Fordring paa stor Nøjagtighed falder af sig selv.

Tab. I.

Nr.	Paramag- netisme.	Nr.	Paramag- netisme.	Nr.	Paramag- netisme.	Nr.	Paramag- netisme.
Røros.		Falun.		Klefva.		Altenau.	
1	16.69	14	10.28	26	25.18	35	6.72
2	8.19	15	0.00	27	26.65	36	16.17
3	7.16	16	0.81	Espedalen.		37	3.64
4	8.70	Swansea.		28	22.44	38	4.11
5	7.31	17	5.19	Kongsberg.		39	5.58
6	10.32	18	6.02	29	18.20	40	1.25
7	3.72	19	7.94	30	19.90	41	0.74
Kaafjorden.		Ringeriget.		31	17.08	42	0.89
8	12.60	20	26.11	32	75.87	43	9.27
9	2.77	21	28.44	33	1.74	44	2.72
10	0.44	22	28.27	34	5.45	45	0.84
Foldalen.		23	22.26			46	1.09
11	9.26	24	17.32			47	0.21
12	13.05	25	15.46				
13	0.60						

Tab. II.

Nr.	Paramag- netisme.	Udskilt Metal.	Mængden af hvidt Metal.	
15	0.00	—	—	Søileformig afsondret Skjærsten, Falun.
47	0.21	Cu	—	Tyndsten, Altenau.
10	0.44	Cu	—	Purpurnetal, Kaafjorden.
13	0.60	Cu	—	Kobbersten efter Præcipitat, Foldalen.
41	0.74	Cu	—	Tredie Kræds kobbersten, Altenau.
16	0.81	—	—	Trotsten, Falun.
45	0.84	Cu	—	Første Sporsten, Altenau.
42	0.89	Cu	—	Fjerde Kræds kobbersten, Altenau.
46	1.09	Cu	—	Anden Sporsten, Altenau.
40	1.25	Cu	—	Anden Kræds kobbersten, Altenau.
33	1.74	Cu	—	Tyndsten, Selvs melting, Kongsberg.
44	2.72	Cu	—	Middelsten, Altenau.
9	2.77	Cu, Fe	Spor	Hvidt Metal, Kaafjorden.
37	3.64	Pb	—	Blysten, anden Gjennemsetn., Altenau.
7	3.72	Fe, Cu	Spor	Sporsten, Røros.
38	4.11	Cu	—	Kræds kobbersten, Altenau.
17	5.19	Cu	—	Raasten, Swansea.
34	5.45	Cu	—	Tyndsten, af Kobbererts, Kongsberg.

Nr.	Paramag- netisme.	Udskilt Met.-tal.	Mængden af hvidt Metal.	
39	5.58	—	—	Røgsten, Altenau.
18	6.02	Cu	—	Raasten, Swansea.
35	6.72	Pb,	—	Blysten, Sligsten, Altenau.
3	7.16	Fe, Cu	Spor	Skjærsten, Røros.
5	7.31	Fe, Cu	1	Sporsten, Røros.
19	7.94	Cu	—	Raasten, Swansea.
2	8.16	Fe, Cu	2	Skjærsten, Røros.
4	8.70	Fe, Cu	3	Sporsten, Røros.
11	9.26	Fe, Cu	3	Skjærsten, Foldalen.
43	9.27	Fe, Cu	5	Skjærsten, af Kobberkis, Altenau.
14	10.28	Fe	4	Skjærsten, Falun.
6	10.32	Fe, Cu	5	Sporsten, Røros.
8	12.60	—	—	Skjærsten. Kaafjorden.
12	13.05	Fe, Cu	3	Skjærsten, Foldalen.
25	15.46	Ni, Fe	5	Skjærsten, Kobbersten, Ringeriget.
36	16.17	—	—	Blysten, første Gjennemsætn., Altenau.
1	16.69	Fe	5	Skjærsten, Røros.
31	17.08	Fe	6	Raasten, Kongsberg.
24	17.32	Ni, Fe, Cu	7	Skjærsten, Kobbersten, Ringeriget.
29	18.20	Fe	7	Raasten, krystallinsk, Kongsberg.
30	19.90	Fe	7	Raasten, finkornig, Kongsberg.
23	22.26	Ni, Fe	8	Garmetal, Ringeriget.
28	22.44	—	—	Nikkelsten i Pulverform, Espedalen.
26	25.18	Ni, Fe	6	Skjærsten, Raasten, Klefva.
20	26.11	Ni, Fe	7	Skjærsten, Raasten, Ringeriget.
27	26.65	Ni, Fe	9	Concentrationssten, Klefva.
22	28.27	Ni, Fe	10	Concentrationssten, Ringeriget.
21	28.44	Ni, Fe	9	Skjærsten, Raasten, Ringeriget.
32	75.87	Fe	—	Raasten, Bundstykket, Kongsberg.

Man ser af Tabel II, at der eksisterer en Forbindelse imellem den paramagnetiske Kraft hos Prøvestykket og Mængden af det i samme udskilte Jern og Nikkel, saaledes at jo mere af disse Metaller, der have været synlige, desto større er ogsaa Kraften; dog med nogle Uregelmæssigheder. Disse kunne dels hidrøre fra Vanskeligheden af at værdsætte Mængden af udskilt Metal, dels derifra at dettes Fordeling i Prøvestykket kan være forskjelligt, hvorved det kunde have hændet, at det Pulver, som benyttedes til Bestemmelsen af den magnetiske Kraft, og det Stykke, som slibtes til den optiske Prøve, have havt forskjel-



lige Mængder af udskilt hvidt Metal, og dels af andre endnu ikke berørte Grunde. Forbigaar vi Nummerne 9, 7 og 3, der kun viste Spor af Jern, og No. 32, hvor Jernmængden var saa betydelig, saa har vi 20 Nummere igjen med udskilt Jern og Nikkel. Tage vi nu for at udjevne Uregelmæssighederne Middeltallet baade af den magnetiske Kraft og af den tilsvarende Mængde af det udskilte Metal af 4 og 4 af de paa hinanden følgende Nummere, faa vi:

	Mængden af hvidt Metal.	Den paramag- netiske Kraft.	Quotienten imellem Mængden af hvidt Metal og den paramagnetiske Kraft.
5, 2, 4, 11	2.25	8.36	3.71
43, 14, 6, 12	4.25	10.73	2.52
25, 1, 31, 24	5.75	16.63	2.90
29, 30, 23, 26	7.00	21.26	3.04
20, 27, 22, 21	8.50	27.37	3.22
			3.074
			— 0.636
			+ 0.554
			+ 0.174
			+ 0.034
			— 0.126

hvorved denne Afhængighed træder tydeligt frem og, som man ser, nærmer sig til at staa i et ligefremt Forhold.

Skulde den Antagelse forholde sig rigtig, at det er Forekomsten af de regulinske Metaller Jern og Nikkel i Stenen, som hovedsagelig fremkalder Paramagnetismen hos den, saa synes det rimeligt, at man ved Hjælp af Magneten maatte kunne skille en pulverformig Sten i tvende Dele, i en, som fulgte med Magneten, og i en anden, som ikke gjorde det. Dette bekræfter sig ogsaa. Saaledes lade Nummerne 20, 21, 26, 22, 27, 29, 30 og 32 sig temmelig fuldkommen skille ad — af de 3 første lader Magneten dog kun lidt tilbage —. Andre derimod lade sig blot afsondre i en mere og i en mindre paramagnetisk Del, som Nummerne 5 og 23, eller i et stærkt magnetisk, i et svagere og i et ikke magnetisk Parti som No. 24. Det synes som om en saadan magnetisk Analyse i alle Tilfælde kunde være en udførbar Sag, da Magneten vilde tage med sig Metallerne og lade Alt andet ligge tilbage. Dette vilde ogsaa kunne ske, hvis ikke en anden fysisk Kraft stillede sig hindrende i Veien: nemlig Adhæsionen. Hensigten med den Pulverisering, der maa gaa forud for Processen, er ene

den at løsrive Metalkornene eller Metalpartiklerne fra den faste Forbindelse med den øvrige Masse. Ere nu Metalpartiklerne yderst fine, saa maa Pulveret være ligesaa fint. Men i saa Fald kommer ogsaa Adhæsionen imellem de enkelte Partikler til at faa en saa stor Indflydelse, at saavel de paramagnetiske som de ikke paramagnetiske Partikler følge Magneten. Dennes Tiltrækning af hver enkelt Metalpartikel er svag, og Tyngden formaa ikke at holde igjen den øvrige Masse, da Pulveret mangler den nødvendige Løshed. Man ser altsaa, at en nødvendig Betingelse for, at en Adskillelse kan finde Sted, er, at Metaldelene ikke ere altfor smaa. Da der nu altid vil gives en Del af dem, der er yderst fine, saa indsees, at det vil blive vanskeligt at faa disse med, da Pulveret ikke kan gøres og ikke bør gøres meget fint. Forudsat at Metaldelene ere af en passende Størrelse og løsrevne fra den øvrige Masse, saa maa man dog dels paa Grund af Adhæsionen, dels paa Grund af at Metaldelene under Tiltrækningsprocessens Voldsomhed mekanisk river med sig endogsaa forholdsvis større Dele af den øvrige Masse, mangfoldige Gange gjentage den samme Operation med det Pulver, som allerede ved Hjælp af Magneten har været udskilt, naar en nogenlunde fuldstændig Adskillelse skal finde Sted. Metaldelene blive dog altid bepudrede med Støv af den øvrige Masse, hvormange Gange end Operationen gjentages.

Man erfarer endvidere ved at betragte disse Tabeller, at med Undtagelse af No. 15 alle de øvrige Nummere vise Paramagnetisme, om end denne for Fleres Vedkommende er yderst ringe. Det ligger derfor nær at opkaste det Spørgsmaal, om det er sandsynligt at antage, at ogsaa i de Stene, hvori man ikke formaa at se metallisk Jern eller Nikkel, disse Metaller dog ere tilstede i en for Øiet ubemærkbar Form. At dette sidste gjælder delvis for enkelte Prøvestykker, er der ikke nogen Grund til at betvivle, men at det ogsaa skulde være Tilfældet med Stene, som besidde en saavidt stor Paramagnetisme som No. 36 Blysten første Stengjennemsætning Altenau, No. 8

Skjærsten Kaafjorden, de 3 Raastene fra Swansea, No. 17, 18, 19 o. s. v., skjønt den slebne Flade af dem ikke fremviste det mindste Spor af metallisk Jern eller Nikkel, er derimod mindre sandsynligt. Jeg haaber i det Følgende at kunne gjøre Rede herfor. Først vil jeg nu ved nogle Exempler vise, hvad den kemiske Analyse lærer os med Hensyn til Sammensætningen af de 2 Dele, som man ved Hjælp af Magneten har kunnet skille en Sten i. Som første Exempel vælger jeg

No. 32 Raasten (Bundstykket i Stikken) Kongsberg.

Materialet blev mig i Aaret 1873 tilligemed et Stykke, No. 31, af en af de øverste Skiver af samme Udstik godhedsfuldt overladt af Hr. Hyttmester Samuelson med den Bemærkning, at han havde opbevaret dem, fordi han fandt dem temmelig ulige i Udseende. Han lagde endvidere til, at en af Smelterne, en ældre Mand, paastod at have gjort den Erfaring, at de sidst styrknede Skiver af Raastenen, de nederste, vare tungere at trille bort end de først styrknede, de øverste. Det Ydre af Raastenen No. 32 er før beskrevet i uslebet og slebet Tilstand. Dens specifikke Vægt fandtes = 5.905. En Portion af omtrent 50 Gram blev pulveriseret for at tjene som Forraad og vel blandet om. Deraf blev henimod 40 Gram ved Hjælp af Magneten adskilt i 2 Dele. En Del af den herved erholdte paramagnetiske Substans blev i et Bægerglas gjentagne Gange skyllet med Alkohol saalænge indtil alle finere Dele vare bortfjernede og Alkoholen viste sig ganske vandklar. Alkohol anvendtes for at forebygge en Oxydation, hvilket ogsaa fuldkomment lykkedes. Jeg foretog nu 4 kemiske Analyser: 1. af det oprindelige Pulver, s, 2. af det ved Hjælp af Magneten uddragne, m, 3. af den samme Sort, men rensat med Alkohol,  $m_1$  og 4. af Residuet, r. Analyserne bleve i Korthed foretagne paa følgende Maade. Der indveiedes til hver Analyse 2 Portioner, hver paa 1 Gram. Af den ene bestemtes Svovlet, af den anden de øvrige Bestanddele. Dekompositionen foretoges ved at blande Pulveret med 4 Gram chlorsurt Kali og

dertil sætte Salpetersyre af sp. Vægt 1.25. Ved at ophede, efterat den heftigste Virkning er ophørt, til Koghede, bliver alt Svovl oxyderet til Svovlsyre. Da der var Sølvs forhaanden, blev dette som Chlorsølv tilligemed noget Slag uopløst tilbage. Chlorsølvet og Slaggen filtreredes tilsammen og udvaskedes, og opløstes det Første paa Filtret med kaustisk Ammoniak. Residuet udvaskedes. Det erholdte Chlorsølv blev, efterat være veiet, for Blæserøret smeltet sammen med Kornbly, og Blyet afdrevet paa en Kapel i en Proberovn; thi det viste sig, at Ammoniakken ogsaa havde uddraget noget af Slaggen, der tilligemed Chlorsølvet udfældtes med Saltsyre. Hvad der ikke var Chlorsølv, regnedes for Slag. Saavel Sølv et som Slaggen bestemtes ogsaa af den Portion, som blev udveiet for Svovlets Skyld. Til Filtratet fra Chlorsølvet og Slaggen sættes Svovlsyre, og afdampedes saalænge, til de øvrige Syrer vare forflygtigede. Over det, som var afdampet, heldtes Vand; Opløsningen henstod at klarne, og derpaa affiltreredes det svovlsure Blyoxyd. Af det sidste Filtrat fældtes Kobberet med Svovlvandstof. Jernet forvandlede til Oxyd, og skede dets Udfældning ved eddikesurt Natron. Det blev atter opløst og fældtes tilsidst med Ammoniak. Kobolten og Nikkelen fældtes med kaustisk Natron og veiedes tilsammen. Adskillelsen imellem disse Metaller foretoges ved Hjælp af Blæserøret. Resultatet af Analyserne vare følgende:

	s	m	m <sub>1</sub>	r
Svovl . . . . .	17.35	5.59	2.19	32.84
Jern . . . . .	73.33	86.34	90.87	57.57
(Aa) Kobolt . . . . .	1.14	1.44	1.68	0.25
Nikkel . . . . .	0.24	0.37	0.45	0.03
Kobber . . . . .	2.95	1.95	1.56	3.55
Bly . . . . .	0.23	0.16	0.16	0.32
Sølv . . . . .	0.33	0.42	0.42	0.21
Slag . . . . .	2.94	2.16	1.18	4.11
Sum	98.51	98.43	98.51	98.88

Ved at behandle den pulveriserede Sten, som før omtalt, med en Magnet beholdtes 22.0140 Gram = m uddraget og 15.7847 Gram = r Residuum, tilsammen af begge altsaa 37.7987 Gram = m + r. Hvis ingen Del af Pulveret under denne Operation er gaaet tabt, kan man, naar man kjender disse tre Vægter og tillige den kemiske Sammensætning af 2 af de 3 Stoffe: det som blev uddraget ved Magneten, det som blev liggende igjen og det oprindelige Raastenspulver, beregne den kemiske Sammensætning af det tredje. Som Betryggelse for de anstillede Analyseres Rigtighed vilde det være en stor Vinding, at man erholdt 2 Analyser af enhver af de 3 Substantser: en direkte udført og en indirekte. Middelet af begge vilde i alle Fald give et nøiagtigere Resultat. Men da det ikke har været muligt at undgaa under de særdeles mange gjentagne Uddragninger med Magneten, der paa Grund af deres Langvarighed flere Gange maatte afbrydes, at noget Pulver er gaaet tilspilde — en Del er nemlig bleven siddende igjen paa Fingrene, en anden Del paa det Papir, hvorpaa Operationen foretoges, en tredje er bleven forstøvet — saa repræsenterer m + r ikke Vægten af det Pulver, som fra først af blev taget i Arbeide. Havde det Tabte samme kemiske Sammensætning som det oprindelige Pulver, saa kan det ganske sættes ud af Betragtning ved Analyseberegningerne; havde det derimod en anden Sammensætning, kan man tænke det Bortkomne bestaaende af to Dele: en Del a af samme Sammensætning som det oprindelige Pulver og en anden x, som enten maatte have samme Sammensætning som m eller som r, hvis Stenen blot bestod af to uligeartede Dele. Delen a behøver man ikke at tage noget Hensyn til, derimod bliver det nødvendigt at kjende x for at kunne udføre Beregningerne. Det viser sig nemlig, at et Tab, der ikke har kunnet være sammensat som det oprindelige Stenpulver, virkelig har fundet Sted, thi der bliver en altfor liden Overensstemmelse imellem de udførte og de beregnede Analyser under den modsatte Forudsætning.

Det er let at indse, at, hvis der har været et Tab  $x$ , et Tab altsaa sammensat enten som  $m$  eller  $r$ , dette skulde kunne beregnes ved Hjælp af hvilkensomhelst af de fundne Qvantiteter af de ved Analyserne bestemte Stoffe, thi den absolute Vægt af en af de kemiske Bestanddele i begge de ved Magneten adskilte Dele samt i Tabet maa være lig Vægtindholdet af samme Bestanddel i en Portion oprindeligt Stenpulver, der veier ligesaameget som de to adskilte Dele og Tabet. Har  $m$  og  $r$  samme Betydning som før, forestiller  $p_s$ ,  $p_m$  og  $p_r$  Procentgehaltten af en af de ensbetsævnte kemiske Bestanddele i Analyserne  $A_s$ , —  $s$ ,  $m$  og  $r$  — og er  $x_r$  Tabet, naar dette er gaaet ud over Residuet, og  $x_m$ , naar det er gaaet ud over den magnetiske Del, saa faar man foregaaende Sætning udtrykt algebraisk saaledes:

I første Tilfælde

$$\frac{m p_m}{100} + \frac{(r + x_r) p_r}{100} = (m + r + x_r) \frac{p_s}{100} \text{ eller}$$

$$m p_m + (r + x_r) p_r = (m + r + x_r) p_s \quad (1)$$

Heraf findes 
$$x_r = \frac{p_s - p_m}{p_r - p_s} \cdot m - r \quad (2)$$

I andet Tilfælde

$$(m + x_m) p_m + r p_r = (m + r + x_m) p_s \quad (3)$$

der giver 
$$x_m = \frac{p_r - p_s}{p_s - p_m} \cdot r - m \quad (4)$$

Indsættes efterhaanden Værdierne af  $p_s$ ,  $p_m$  og  $p_r$  for Svovlet, Jernet, Kobberet o. s. v. i Formelen (2), faar man

$x_r$	beregnet af Svovlets Procentgehalt	= +	0.9823	Gram
-	— Jernets	—	= +	2.3880 —
-	— Kobberets	—	= +	20.9053 —
-	— Koboltens og Nikkelens	—	= -	7.1791 —
-	— Blyets	—	= +	1.3373 —
-	— Sølvets	—	= +	0.8263 —
-	— Slaggens	—	= -	1.1087 —

Man ser der er kun liden Lighed imellem de fundne Værdier af  $x$ , der tilnærmelsesvis skulde være af samme Størrelse, hvis Forudsætningen var rigtig. Da intet Pulver er kommen væk paa anden Maade end den før omtalte, vil et Tab af næsten 21 Gram, der er mere end hvad der er blevet igjen af samme Slags Pulver, aabenbart være umuligt. En negativ Værdi af  $x$ , saaledes som den erholdes beregnet af Koboltens og Nikkelens samlede Procentgehalt, antyder, at det er den magnetiske Del, som er bleven formindsket. Af Formelen (4) findes for disse Metaller  $x_m = 18.365$  Gram, en Værdi ligesaa umulig som den, man fandt af Kobberets Data.

Da det nu saaledes viser sig, at  $x$  faar en forskjellig Værdi, eftersom den beregnes af den ene eller anden af de ved Analyserne fundne Stoffe, saa følger heraf, at det, som er gaaet tabt, hverken har havt samme Sammensætning som den magnetiske Del eller som Residuet. Da et af to maatte indtræffe, hvis Stenen blot bestod af to heterogene Dele, saa slutter man heraf, at de heterogene Dele maa være flere end to.

Man kunde antage, at de erholdte, saa uoverensstemmende Værdier af  $x$  vare at tilskrive mindre nøiagtigt udførte Analyser. Dette kan dog ikke være Grunden, thi tre andre Analyser foreløbig foretagne af samme Raastensstykke, men af et andet Materiale, end det, der benyttedes ved de forhen anførte (Raastensstykket var som før bemærket ikke meget egalt) gave samme Resultat. Fremgangsmaaden ved de foreløbige Analyser adskilte sig fra den, der anvendtes ved de før meddelte, derved, at den ringe Mængde svovlsure Blyoxyd, der erholdtes, ikke affiltreredes, førend Svovlvandstof lededes ned i Opløsningen for at bundfælde Kobberet. Derved blev Svovlkobberet forurennet med Svovlbly. Saaledes som Analyserne nedenfor ere anførte, er derimod Kobbergehalterne rettede ved at benytte de Værdier for Blyet, som senere bleve fundne ved Analyserne Aa. Dette har jeg troet at kunne gjøre uden at begaa nogen mærkelig Feil. Hvad Jernets Bestemmelse angaar,

blev det som Oxyd fældet umiddelbart med Ammoniak, uden at der blev taget Hensyn til Kobolten og Nikkelen. I alt Øvrigt foretoges Analyserne som de foregaaende og med lige-  
saamegen Omhu. De ere

## Ab.

	s	m	r
Svovl . .	17.81	6.25	32.54
Jern . .	74.28	87.56	59.16
Kobber . .	3.05	2.18	3.59
Bly . .	0.23	0.16	0.32
Selv . .	0.27	0.33	0.22
Slag . .	3.30	1.31	3.58
	<hr/> 98.94	<hr/> 97.79	<hr/> 99.41

De ukorrigerede Kobbergehalter vare

3.26 , 2.33 3.89

Ved Adskillelsen med Magneten erholdtes 6.1364 Gram uddraget = m og 4.6100 Gram Residum = r. Beregnes Tabet ved Hjælp af Formlen (2) ved i det ene Tilfælde at lægge Svovlets Procentgehalter til Grund og i det andet Tilfælde Kobberets, faar man

x af Svovlet . . = 0.2058

x - Kobberet . . = 5.2768

Det er klart, at Tabet under foreøvrigt lige Omstændigheder maa staa i ligefremt Forhold til det anvendte Pulvers Mængde. Reduceres det derfor til den Quantitet, der blev taget i Arbejde ved den forhen udførte Uddragning eller i Forholdet 37.7987: 10.7464, blive de to Værdier

af Svovlet . . 0.7232

- Kobberet . . 18.5430

De tilsvarende Tab beregnede af Analyserne Aa ere før fundne

0.9823 og  
20.9053



Af Analyse Ab (m) er Svovlgehalten af den magnetiske Del lig 6.25 Procent, af Analyse Aa (m) 5.59 Procent. Det er tydeligt (hvad ogsaa er skeet), at Uddragningsprocessen ved Hjælp af Magneten har været udført fuldkomnere og desaarsag gentaget flere Gange i sidste Tilfælde end i første, hvorved ogsaa et større Tab er bleven Følgen.

Forholdet imellem det Tab, der er beregnet af Svovlprocenterne, og det, der er beregnet af Kobberprocenterne, findes af Analyserne Ab = 0.039 og af Analyserne Aa = 0.046. Forskjellen imellem begge er ikke meget stor. Man ser altsaa, at begge Analysegrupper give meget nær det samme Resultat, naar man benytter Svovlets og Kobberets Gehalter ved Tabsberegningen.

Af Analyse Aa (r) findes de Svovlmængder, der ere nødvendige for med Kobberet at danne Halvsulfuret og med de øvrige Metaller undtagen Jernet enkelte Sulfureter, at være for

Kobolt og	}	- 0.15 Svovl
Nikkel		
Kobber	-	0.90 —
Bly	-	0.05 —
Sølv	-	0.03 —

---

Tilsammen = 1.13 Svovl.

Der bliver altsaa tilbage for Jernet 31.71 Svovl. Men 31.71 Svovl forholder sig til 57.57 Jern som S : 1.037 Fe eller meget nær som S : Fe. Jernet optræder altsaa som enkelt Svovljern. At der i Raastenen ved Siden af dette Sulfuret tillige skulde forekomme nogen lavere Jernsvovlforbindelse, synes, naar man betragter Analyserne Aa (m) og (m<sub>1</sub>), hvor Æquivalentforholdene mellem Svovl og Jern, naar de øvrige Metaller have faaet sin Del af Svovlet, er som 1 : 12.2 og 1 : 97.7, og lægger Mærke til, at Jernet er forhaanden i Stenen i saa stort Overskud, at det er mere end tilstrækkeligt til med

Svovlet at danne Halvsulfuret — af Analyse (s) i Æquivalentforholdet 2.7 : 1 — i højeste Grad usandsynligt.

Man maa saaledes antage, at Stenen gennemsnitlig bestaar af en vis Portion Svovlmetal — hovedsagelig  $\text{FeS}$  — og en vis Portion frit Metal, enhver Del med sin kemiske Sammensætning. Ved at behandle den i pulveriseret Tilstand med en Magnet kan dette Forhold ikke forrykkes, om end Pulveret mekanisk skilles ad i tvende særskilte Dele. Gaar Intet under Operationen tabt, maa begge Dele tilsammentagne besidde med uforandret kemisk Sammensætning den samme Mængde Svovlmetal og den samme Mængde Metal. Er Svovlmetallet i sine mindste Dele ganske homogent, maa en vis Qvantitet Svovl tillige repræsentere som dermed i Forbindelse værende en vis Qvantitet Jern, en vis Qvantitet Kobolt, en vis Qvantitet Kobber o. s. v. Da Residuet kun indeholder ringe Mængder af paramagnetiske Dele — dette gjælder især om det sidst analyserte (Aa(r)) — saa kan deri ikke være noget andet frit Metal end maaske en lille Smule Kobber (Sølv, Bly), som vi for det Første vil sætte ud af Betragtning. Residuet maa altsaa fradrages Slaggen eller Oxyddelene repræsentere Svovlmetallet. Er dette i alle Dele af Stenen af konstant Sammensætning, maa man af den oprindelige Sten, af den magnetiske Del og af den magnetiske Del, vasket med Alkohol, kunne finde Sammensætningen af det udskilte Metal, naar man af disse 3 Forbindelser fradrager, hvad der hører Svovlmetallet til. Finder man saaledes, at de ved en saadan Beregning erholdte Resultater give tilnærmelsesvis den samme procentvise kemiske Sammensætning af det udskilte Metal, maa man antage Forudsætningen for rigtig, i modsat Fald paa en eller anden Maade for feilagtig.

I Svovlmetallet — Analyse Aa,r — er fundet 32.84 Proc. Svovl, i den oprindelige Sten Aa,s 17.35 Proc. Da 32.84 Svovl er i Forbindelse med 57.57 Proc. Jern, 0.25 Proc. Kobolt, 0.03 Proc. Nikkel, 3.55 Proc. Kobber o. s. v., saa maa

naar 17.35 Proc. Svovl er en Bestanddel af samme Slags Svovlforbindelse, denne Mængde Svovl være i Forbindelse med

$$\frac{17.35}{32.84} \cdot 57.57 \text{ Jern } \frac{17.35}{32.84} \cdot 0.25 \text{ Kobolt, } \frac{17.35}{32.84} \cdot 0.03 \text{ Nikkel o. s. v.}$$

I Analyse Aa, m, er Svovlgehalten fundet lig 5.59 Proc. Følgelig

$$\text{svarer til denne Gehalt } \frac{5.59}{32.84} \cdot 57.57 \text{ Jern, } \frac{5.59}{32.84} \cdot 0.25 \text{ Kobolt,}$$

$$\frac{5.59}{32.84} \cdot 0.03 \text{ Nikkel o. s. v. Paa lignende Maade forholder}$$

man sig med de øvrige Analyser for at finde de til Svovlforbindelsen hørende enkelte Bestanddele. Saaledes erholdes, hvad der skal fradrages som hørende de Svovlforbindelser, der indeholdes i de Dele, der repræsenteres ved Analyserne Aa (s, m, m<sub>1</sub>) og Ab (s, m), af Tabellerne I og II, og hvad der bliver tilbage, af Tabellerne III og IV. Tabellerne V og VI angiver det udskilte Metals Sammensætning beregnet i 100 Dele med Udeladelse af Slaggen.

Tab I.

	s	m	m <sub>1</sub>
Svovl .	17.35	5.59	2.19
Jern .	30.42	9.80	3.84
Kobolt	0.13	0.04	0.02
Nikkel	0.02	0.01	0.00
Kobber	1.88	0.60	0.24
Bly .	0.17	0.05	0.02
Sølv .	0.11	0.04	0.01
Slag .	2.17	0.70	0.27
	52.25	16.83	6.59

Tab III.

	s	m	m <sub>1</sub>
—	—	—	—
	42.91	76.54	87.03
	1.01	1.40	1.66
	0.22	0.36	0.45
	1.07	1.35	1.32
	0.06	0.11	0.14
	0.22	0.38	0.41
	0.77	1.46	0.91
	46.26	81.60	91.92

Tab. II.

	s	m
Svovl .	17.81	6.25
Jern .	32.38	11.36
Kobber .	1.96	0.69
Bly .	0.18	0.06
Selv .	0.15	0.04
Slag .	1.96	0.69
	<hr/> 54.44	<hr/> 19.09

Tab. IV.

	s	m
—	—	—
	41.90	76.20
	1.09	1.49
	0.05	0.10
	0.12	0.29
	1.34	0.62
	<hr/> 44.50	<hr/> 78.70

Tab. V.

	s	m	m <sub>1</sub>
Jern . .	94.33	95.51	95.63
Kobolt . .	2.22	1.74	1.82
Nikkel . .	0.48	0.46	0.49
Kobber . .	2.35	1.68	1.45
Bly . . .	0.13	0.13	0.15
Selv . . .	0.48	0.48	0.45
	<hr/> 100.00	<hr/> 100.00	<hr/> 100.00

Tab. VI.

	s	m
Jern . .	97.08	97.59
Kobber . .	2.53	1.91
Bly . . .	0.12	0.13
Selv . . .	0.28	0.37
	<hr/> 100.00	<hr/> 100.00

Betragter man Tabel V, finder man, uagtet der nok existerer en tilnærmende Overensstemmelse imellem de erholdte Resultater, dog en mærkelig Forskjel. Det viser sig nemlig, at det udskilte Metals Kobbergehalt er faldet saameget større ud, naar dets kemiske Sammensætning er beregnet af en paa Svovl rigere Forbindelse end af en fattigere.

I den oprindelige Sten maa som en Følge af Sagens Natur være tilstede alle de Dele, der repræsentere det udskilte Metal. Kunde man med ligesaastor Sikkerhed paastaa, at det samme var Tilfældet med Delene  $m$  og  $m_1$ , maatte Følgen heraf blive, at det Svovlmetal, som var bleven siddende ved det uddragne Metal, havde en fra  $r$  forskjellig Sammensætning og navnlig var fattigere paa Kobber; thi paa den Maade, paa hvilken Beregningen er foretaget, vil, hvis en ringere Kobbergehalt skulde være forhaanden i det regulinske Metal ledsagende Svovlmetal, dette Tilfælde have til Følge, at det regulinske Metal selv tilsyneladende faar en for ringe Gehalt deraf. For at komme paa det Rene med, hvorledes Sagen egentlig forholder sig, bliver det nødvendigt at drøfte forskellige Muligheder.

Før er bleven paapeget, at Residuet muligens kunde indeholde en ringe Mængde metallisk Kobber, der ikke var saaledes indvævet med Jern, at det kunde tiltrækkes af Magneten. Lad os antage, at den hele ved Analysen erholdte Kobbermængde er fri metallisk. I dette Fald vil det Svovl, som kommer til at staa til de øvrige Metaller Raadighed, foreges. Jernet faar dog derved ikke en saa stor Mængde, at det kan optræde i en højere Svovlforbindelse end enkelt Svovljern. Thi trække vi ifra den Svovlmængde, der forudsattes at tilhøre Svovlkobberet, nemlig 0.90, og lægger til 31.71, som før beregnet tilkom Jernet, erholdes 32.61. Men 57.57 Jern behøver 32.90 for at danne enkelt Svovljern. Lad os endvidere antage, at i  $m_1$  er alt frit metallisk Kobber, som paa Grund af Adhæsionen var bleven hængende igjen ved  $m$ , kommet væk. Ved  $m$  kan dog ikke samme Supposition være gjeldende, da den større Svovlgehalt i denne i Sammenligning med den i  $m_1$  viser, at noget af Residuet og følgelig noget af dets Kobber maa være blevet hængende ved. Lad os sætte, at der til Svovlmængden 5.59 (Tab. I  $m$ ) ikke svarer 0.60 Kobber, men blot Halvparten. I den oprindelige Sten (Tab. I  $s$ ) derimod maa der naturligvis

til 17.35 Svovl fremdeles svare 1.88 Kobber. I Tab. III m og  $m_1$  bliver saaledes Kobbermængderne 1.65 og 1.56 istedetfor 1.85 og 1.32 og Summerne 81.90 og 92.16 istedetfor 81.60 og 91.92. Paa denne Maade erholdes Kobbermængderne i Metallegeringen beregnet: af den oprindelige Sten som før 2.35, af den magnetiske Del, m, 2.01, og af den vadskede Del,  $m_1$ , 1.69. Man ser saaledes, at man under en saa lidet sandsynlig Forudsætning som den, at alt Kobberet i Residuet var i metallisk Tilstand, dog ikke kan bringe Kobbergehalten i det i de 2 magnetiske Døle indeholdte udskilte Metal til at naa samme Høide som i det i den oprindelige Sten indeholdte.

Om det nu end ikke vilde være noget usandsynligt i, at Svovlmetallet viste en noget forskjellig Sammensætning med Hensyn til Forholdet imellem dets constituerende Metaller, hvad enten det laa i mere eller mindre nær Berørelse med det udskilte Jern, saa følger dog af den anførte Beregning, at en foranderlig Sammensætning af Svovlmetallet ikke kan have været den Grund, som har hidført den fundne ulige Kobbergehalt i det frie Metal i s, m og  $m_1$ , men at Grunden maa være at søge deri, at Delene m og  $m_1$  ikke indeholde det i Stenen udskilte Metal med en saadan kemisk Sammensætning, som det oprindelig havde. Man maa deraf antage, at den beregnede Sammensætning af det frie Metal i m og  $m_1$  tilnærmelsesvis ogsaa er den rette. Den første Slutning, som man heraf kan uddrage, er den, at det i Stenen udskilte Metal ikke er ensartet. Gaaende ud fra denne Sætning kan vi bygge videre. Som man af Tabellerne I og III vil se, danner det metalliske Jern næsten 43 Procent af hele Stenens Masse. Omendskjønt man ikke vel kan antage, at saameget Jern har været opløst i det Svovlmetal, hvori det nu er forhaanden — hvorom mere senerehen — saa har dog Jernets Mængde været saa stor, at det ikke har kunnet undgaaes, at ogsaa en Del af Kobberet og tillige af Kobolten under Styrkningen har skilt sig ud. Men da disse to Metaller i Forhold til Jernet optræde

saa ganske underordnet, vil ogsaa de Dele af de udskilte Kobber- og Koboltpartikler, som ikke ere opslugte af Jernet, besidde en høi Grad af Lidenhed. Uagtet Kobberet er en diamagnetisk Substant, vil det dog under Tilstedeværelsen af saameget Jern ganske vist blive saa jernholdigt, at det tiltrækkes af Magneten, om end svagt. Kobolten er jo selv et paramagnetisk Legeme. Ved Uddragningen med Magneten af den pulveriserede Sten følge de paramagnetiske Dele med. Af disse vil kun de fineste Partikler besmitte Papiret, hvorpaa Operationen foretages, og Fingrene, naar man ved deres Hjælp skal befri Magneten for det medtagne Pulver. Da nu det fineste Pulver forholdsvis vil være rigere paa Kobber og Kobolt end den øvrige Del af Pulveret, saa forklares herved, at den magnetiske Del m er bleven fattigere paa Kobber og Kobolt med Hensyn paa det deri indeholdte frie Metal, fordi forholdsvis en større Del af disse Metaller end af de øvrige er gaaet tabt. Ved Vadsnkningen med Alkohol tabtes end yderligere noget af det fineste Pulver. Det fri Metal, som indeholdes i  $m_1$ , maa saaledes være bleven end kobberfattigere. En saadan Antagelse er ogsaa i fuldkommen Harmoni med Resultaterne af den Beregning, der blev anstillet for at finde det Tab, der var forarsaget ved den magnetiske Uddragningsproces.

Efter Fournet har i Rækken af Metallerne Cu, Fe, Sn, Zn, Pb, Ag, Sb og As Kobberet den stærkeste og Arsen den svageste Foreningsevne (Affinitet) til Svovl. Hos de øvrige Metaller af denne Række er Foreningsevnen til Svovl desto stærkere, jo nærmere de staa Kobberet. Lad os se, hvorledes Forholdet stiller sig hos Stenen No. 32 imellem den Del Metal, der er bleven i Forbindelse med Svovl, og den Del, som er bleven udskilt. Af Tabellerne I og III finde vi af de Data, der ere uddragne af Analyserne Aa (s og r), følgende Bestemmelser:

## Procenter af den hele Mængde Metal i Stenen:

	I Svovl- metallet.	I det frie Metal.
Jern . . .	41.48	58.52
Kobolt . .	11.40	88.60
Nikkel . .	8.33	91.67
Kobber . .	63.73	36.27
Bly . . .	73.91	26.09
Sølv . . .	33.33	66.67

Efter denne Beregning faa vi Rækken Pb, Cu, Fe, Ag, Co, Ni.

Af Analyserne Aa (s og r) erholdes som det sandsynligste endelige Resultat, at Raasten No. 32 er en Blanding af 3 forskjellige Substantser, nemlig: 1. Svovlmetal, 2. Metal og 3. Slag, der i 100 Dele staa i følgende Forhold til hinanden

Svovlmetal	50.84
Metal . .	46.18
Slag . .	2.98

---

100.00

og deraf indeholder

	Svovlmetallet i 100 Dele.	Metallet i 100 Dele.
Svovl . . . .	34.65	—
Jern . . . .	60.75	94.33
Kobolt . . .	0.26	2.22
Nikkel . . .	0.03	0.48
Kobber . . .	3.75	2.35
Bly . . . .	0.34	0.13
Sølv . . . .	0.22	0.48
	<hr/> 100.00	<hr/> 100.00

## No. 31. Raasten, Kongsberg.

Den er af samme Udstik som No. 32, men af en af de øverste Skiver. Dens Ydre er før beskrevet. Dens specifikke Vægt fandtes 5.055, altsaa betydeligt under No. 32 s, der var



5.905. At dekomponere den ved Hjælp af Magneten lykkedes ikke. Af 2 Analyser, hvortil benyttedes samme Slags Pulver, fandtes Sammensætningen

## B.

	a	b
Svovl . . .	28.75	28.75
Jern . . .	58.77	60.34
Kobolt } . .	—	0.61
Nikkel } . .		
Kobber . . .	4.07	3.91
Bly . . .	0.28	0.45
Sølv . . .	0.58	0.58
Slag . . .	6.92	3.80
	<hr/> 99.38	<hr/> 98.44

Analyse a blev først foretaget og Jernoxydet fældedes umiddelbart med Ammoniak uden at tage Hensyn til Nikkel og Kobolt. Blygehalten er antagelig for lav. I samme Analyse er der mindre Jern men mere Slag eller Residuum end i Analysen b.

### Jernsugge fra Raasmeltningen, Kongsberg.

Samtidig med, at der af Hr. Hyttemester Samuelson paa Kongsberg blev mig overladt til Undersøgelse de analyserede Raastene No. 32 og No. 31, erholdt jeg ogsaa af ham et Stykke af en Jernsugge fra Raasmeltningen sammesteds, dog ikke tilhørende samme Raasmeltnings Kampagne. Dette var mig af saameget større Interesse, da den, som det senerehen vil ses, utvivlsomt maa anses som en mere eller mindre direkte Afledning af Raastenen. Det Stykke, som jeg kunde disponere over, havde omtrent en Længde af 4 Tommer og et Gjennemsnit af imellem  $\frac{1}{4}$  og  $\frac{2}{3}$  Tomme. Det bestod ligesom af en Bundt af tæt sammenpakkede Jernfibre, der i det Hele taget løb parallelle med Stykkets Længderetning, men indbyrdes tildels vare sammenvoxede. Dets Textur var saaledes traadig.

Det lod sig uden megen Vanskelighed spalte efter Længden, hvorved der fremkom en Klyvningsflade, der var besat med flere Jerntagger. Ved at hamre paa den løsnede Fibrerne sig efterhaanden fra hinanden, idet der samtidigt faldt ud et spædt pulverformigt Legeme. Ved at overskjære Stykket paa tværs med en Uhrfjærsag, hvilket let lod sig gjøre, viste Gjennemsnitsfladen sig ved en løselig Betragtning som blank metallisk med Jernets Farve, men ved en næiere Beskuelse med Lupen kom glindsende afsøndrede Metaldele af nogle Tiendedele af et Millimeters Gjennemsnit tilsyne, skilte fra hinanden ved et mærkere Legeme. Ved Hamring og ved at plukke de sammenfildrede Jerndeale ifra hinanden blev det muligt at faa disse i Form af mindre, skjælagtige Dele. Det viste sig at den spæde Del, der var en Svovlforbindelse, ikke lod sig tiltrække af Magneten. Derved blev det muligt som ved Stenen No. 32 at skille ad en Portion af Stykket i 2 Dele, en metallisk og en spæd. Begge bleve underkastede kemiske Analyser.

## C.

	Jernet.	Svovl- metallet.	Jernet.	Svovl- metallet.	
	a	b	c	d	e
Svovl . . . . .	3.82	34.58	3.04	34.79	10.92
Jern . . . . .	91.81	60.94	93.26	60.51	84.69
Kobolt . . . . .			2.02	} 0.33	
Nikkel . . . . .			0.51		
Kobber . . . . .	0.98	1.33	0.84	1.15	1.06
Bly . . . . .			Spor	0.04	
Sølv . . . . .	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001
Slag . . . . .	0.44	2.19	0.53	2.12	0.96
Sum	97.051	99.042	100.20	98.942	97.63

a og b ere to ikke ganske fuldstændige Analyser, hvad Kobolt, Nikkel og Bly angaar, c og d to fuldstændige men af en anden Portion af Jernsuggen. Jernet blev, før det analyseredes, vasket

med Alkohol. B-regner man af Analysen d Forholdet imellem Svovlets og Metallerne *Æ*quivalenter paa samme Maade, som det blev udført ved Analysen Aa (r), findes dette Forhold imellem Svovl og Jern at være 1 : 1.008. Ogsaa i denne Svovlforbindelse er der altsaa kun enkelt Svovljern. Anses det Svovl, der endnu er forhaanden i det med Alkohol vadskede Jern, som hidrørende fra en Svovlforbindelse af samme Sammensætning som den Analysen (d) giver, saa findes det egentlige Metal i 100 Dele at være sammensat af

Jern . . .	96.45
Kobolt } .	2.74
Nikkel } .	
Kobber .	0.81
	<hr/>
	100.00

Ved Skilningen ved Hjælp af Magneten fandtes

6.3739 Gram magnetiske Dele af Sammensætningen (a) og

1.9115 — Residuum - — (b).

Heraf kan den kemiske Sammensætning af det samlede Jernsuggestykke findes og (e) er den saaledes beregnede Analyse.

#### No. 27. Nikkelkoncentrationssten fra Klefva Nikkelværk i Sverige.

Om dens Ydre kan ses forud. Dens specifikke Vægt fandtes lig 6.073. Ved Uddragningen ved Hjælp af Magneten erholdtes af en Portion 9.8192 magnetiske Dele og 18.8240 Gram Residuum. Der blev foretaget 4 Analyser: 1. af det oprindelige Stenpulver, s, 2. af den magnetiske Del, m, 3. af samme vadsket med Alkohol, m<sub>1</sub> og 4. af Residuet, r, og erholdtes

	D			
	s	m	m <sub>1</sub>	r
Svovl . .	19.06	7.64	5.52	25.05
Jern . .	6.27	11.57	12.84	3.92
Kobolt . .	3.33	3.93	61.78	3.85
Nikkel . .	43.64	55.92		36.21
Kobber . .	27.23	19.60	18.42	31.04
Slag . .	0.11	0.26	0.15	0.14
	99.64	98.92	98.71	100.21

Antager man, at Kobberet i Svovlforbindelsen — Analyse (r) — optræder som  $\text{Cu}_2\text{S}$ , Jernet som  $\text{FeS}$ , behøver 31.04 Kobber 7.833, og 3.92 Jern 2.240 Svovl for at danne disse Forbindelser. Der bliver saaledes tilbage for Kobolten og Nikkelen 14.977 Svovl og Æquivalentforholdet imellem  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Ni} \\ \text{Co} \end{smallmatrix} \right\}$  og S vil være lig 1.476 eller meget nær som  $\text{R}_2\text{S} + \text{RS}$ .

Af den ved Analyserne (s), (m) og (r) fundne kemiske Sammensætning af de 3 Stofte: det oprindelige Stenpulver, den magnetiske Del og Residuet, samt af Vægterne  $9.8192 - m$ ,  $18.8240 - r$  og  $28.6432 - m + r$  har jeg tillige beregnet den kemiske Sammensætning af samme 3 Stofte, hvilken nedenfor findes anført, sammenstillet med de direkte udførte Analyser.

	s			m			r		
	direkte	indirekte	Middel	direkte	indirekte	Middel	direkte	indirekte	Middel
Svovl .	19.06	19.08	19.07	7.64	7.58	7.61	25.05	25.02	25.035
Jern .	6.27	6.54	6.405	11.57	10.77	11.17	3.92	3.51	3.715
Kobolt .	3.33	3.88	3.605	3.93	2.33	3.13	3.85	3.02	3.435
Nikkel .	43.64	42.97	43.305	55.92	57.88	56.90	36.21	37.23	36.72
Kobber .	27.23	27.12	27.175	19.60	19.93	19.765	31.04	31.21	31.125
Slag .	0.11	0.18	0.145	0.26	0.05	0.155	0.14	0.03	0.085
	99.64	99.77	99.705	98.92	98.54	98.73	100.21	100.02	100.115

At der ved den magnetiske Uddragning ogsaa i dette Tilfælde har gaaet Noget tabt, er en Selvfølge. Men Tabet synes paa Grund af den nogenlunde gode Overensstemmelse imellem de beregnede og udførte Analyser at have været tilnærmelsesvis af samme Beskaffenhed som det oprindelige Stenpulver. Dog finder man af Formel (4) Side (262)

$$\begin{aligned}
 &\text{for Svovl} \quad . \quad x_m = 0.0545 \\
 &- \text{Jern} \quad . \quad x_m = 3.3214 \\
 &\quad \left. \begin{array}{l} \text{Kobolt} \\ \text{Nikkel} \end{array} \right\} \cdot x_m = 0.2797
 \end{aligned}$$

og af Formel (2) sammesteds

$$\text{for Kobber} \quad . \quad x_r = 0.8402$$

hvilket Resultat giver tilkjende, at Tabet, der har fundet Sted, hverken har havt samme Sammensætning som den magnetiske Del  $m$  eller som Residuet  $r$  og er en Bestyrkelse for den Mening, som er udtalt under No. 32 Raasten, at finere, svagt magnetiske Kobberpartikler er gaaet tabt.

Beregnes det udskilte Metals Sammensætning i  $s$ ,  $m$  og  $m_1$  ved Hjælp af de direkte Analyser af samme Navn og af den direkte Analyse ( $r$ ), og den fundne Slag ikke medregnes, faar man den i 100 Dele at være følgende:

	$s$	$m$	$m_1$
Jern . .	14.07	15.22	15.66
Kobolt } .	70.50	69.91	69.21
Nikkel }			
Kobber .	15.43	14.87	15.13
	<hr/> 100.00	<hr/> 100.00	<hr/> 100.00

Kobbermængden i  $m$  og  $m_1$  er, som man ser, mindre end i  $s$ , dog større i  $m_1$  end i  $m$ .

Man faar som endeligt Resultat, at denne Nikkelsten er en Blanding af Svovlmatal, Metal og Slag, der staa i følgende Forhold til hinanden:

Svovlmatal	76.42
Metal . .	23.47
Slag . .	0.11
	<hr/> 100.00

Deraf indeholder:

	Svovlmetallet i 100 Dele.	Metallet i 100 Dele.
Svovl . .	25.03	—
Jern . .	3.92	14.07
Kobolt . .	3.85	1.71
Nikkel . .	36.19	68.79
Kobber . .	31.01	15.43
	100.00	100.00

#### No. 4. Sporsten, Røros.

Dens Ydre forhen beskreven under samme Nummer. Dens specifikke Vægt fandtes = 5.102. Den lod sig ved Hjælp af Magneten — dog mindre fuldkomment — skille ad i to Dele. Af en pulveriseret Portion E erholdtes m = 10.4752 magnetiske Dele og r = 37.207 Residuum. Af en anden Portion F = 18.8363 uddrogtes ved Hjælp af Magneten m = 6.0018, og blev tilbage r = 12.7793. Der tabtes altsaa af Pulveret F kun 0.0552 eller 0.293 Procent. Uddragningen med Magneten i sidste Tilfælde gjentoges ogsaa blot nogle faa Gange, for at det uundgaaelige Tab under Operationen saameget som muligt skulde indskrænkes. Af de udskilte Dele af E foretoges 2 Analyser — Analyserne E — en af m og en af r. Af samme Slags Stenpulver, hvorfra F var taget, foretoges en Analyse, og dernæst Analyser af de af F ved Magneten fraskilte Dele m og r, og da disse 3 Analyser, Fa, ved Beregning ikke gav et saa rigtigt Resultat, hvad Kobberet angik, som jeg ansaa nødvendigt, blev atter tre Analyser foretagne af samme Material — Analyserne Fb — med den Forandring, at Kobberet blev opløst og fældet 2 Gange. I begge de sidste Grupper blev Jernet opløst og fældet 2 Gange ved Hjælp af eddikesurt Natron. Resultatet var følgende, naar s betegner oprindeligt Stenpulver, m magnetisk Pulver og r Residuum:

## E

	s	m	r
	beregnet af m og r.		
Svovl . .	22.84	20.64	23.46
Jern . .	22.23	32.32	19.41
Kobolt	0.30	0.78	0.17
med lidt			
Nikkel			
Kobber .	49.63	40.77	52.12
Bly . .	Spor	Spor	Spor
Uopløst .	4.36	3.70	4.54
	99.36	98.21	99.70

## Fa

	s	m	r
Svovl . .	22.21	21.34	22.68
Jern . .	19.73	25.28	18.09
Kobolt	0.69	0.98	0.50
med lidt			
Nikkel			
Kobber .	49.62	43.25	52.32
Uopløst .	6.07	7.87	4.85
	98.32	98.72	98.44

## Fb

	s	m	r
Svovl . .	22.21	21.34	22.68
Jern . .	20.45	25.88	17.77
Kobolt	0.69	1.02	0.50
med lidt			
Nikkel			
Kobber .	49.32	43.25	52.05
Uopløst .	5.61	6.79	5.09
	98.28	98.28	98.09





Adskillelsen ved Hjælp af Magneten var, som anmærket, mindre fuldkommen og saaledes ses, at den magnetiske Del af Stenen fremdeles er meget rig paa Svovl. Hvad der ikke erfares af Analyserne, er, at Residuet endnu indeholdt en Del mindre stærkt magnetiske Partikler, hvilket især gjælder om Residuet af den sidste Portion. Man kunde antage, at der ingen anden Forskjel var imellem den magnetiske Del m og Residuet r end, at de paramagnetiske Stoffe hovedsagelig vare ophobede i den første og for største Delen fraskilte i det sidste imedens den egentlige Svovlforbindelse i begge to var af samme kemiske Beskaffenhed. I saa Fald maatte der være samme Forhold imellem Svovlet og Kobberet i den magnetiske Del som i Residuet.

Beregner man af de 3 Grupper af Analyser E, Fa og Fb, hvormeget Kobber der skal være i Residuet, naar dette Metal skal staa i samme Forhold til Svovlet som i den magnetiske Del, saa erholder man af Analyserne:

$$E \quad Cu = \frac{23.46}{20.64} \cdot 40.77 = 46.34$$

$$Fa \quad Cu = \frac{22.65}{21.275} \cdot 43.56 = 46.35$$

$$Fb \quad Cu = \frac{22.65}{21.275} \cdot 43.38 = 46.18$$

Da Kobbermængden i Residuet er funden 52.12, 52.465 og 52.11, bliver saaledes den beregnede Kobbermængde under den omtalte Forudsætning 5.78, 6.115 og 5.93 for liden.

Ved at betragte en sleben Flade af denne Sten kan man iagttage en Del udskilte ganske smaa Kobberkorn samt nogle dels naaleformige, dels fjærlignende, dels uregelmæssig formede Jernpartikler. Rimeligvis have førstnævnte, tildels været saa lidet jernholdige, at de ikke have kunnet følge med Magneten. men ere blevne tilbage i Residuet. Af den hele i dette fundne Kobbermængde har vel saaledes en ringere Del ikke været bunden til Svovl, men været forhaanden i metallisk Tilstand.

Skulde altsaa den forholdsvis større Mængde Kobber i Residuet end i den magnetiske Del skrive sig fra frit metallisk Kobber, saa maatte det Svovl, der er fundet ved Analysen, efterat det antagne kemisk bundne Kobber har faat sin Part deraf efter Formelen  $\text{Cu}_2\text{S}$ , forøvrigt tilfalde Jernet og Kobolten (Nikkelen). En saadan Supposition kan kun være rigtig til en vis Grad. Thi at antage en større Mængde frit metallisk Kobber tilstede i Residuet, end at Jernet og Kobolten med Svovl kunde optræde som RS, kan dog ikke være tilladt, da dette vilde forudsætte, at metallisk Jern og en høiere Jernsvovlforbindelse kunde optræde ved Siden af hinanden i Stenen. Ydergrænsen for Mængden af frit metallisk Kobber bliver følgelig den, at Jernet og Kobolten optræder som RS. Af Analyserne faar man, at

E		Fa		Fb	
11 Jern behøver	11.09 Svovl.	17.805 Jern behøver	10.06 Svovl.	17.835 Jern behøver	10.19 Svovl.
17 Kobolt —	0.09 —	0.525 Kobolt —	0.29 —	0.52 Kobolt —	0.29 —
34 Kobber —	11.69 —	46.35 Kobber —	11.70 —	46.18 Kobber —	11.65 —
Sum 22.87 —		Sum 22.05 —		Sum 22.13 —	
d Analyserne fandtes 23.46 —		22.65 —		22.65 —	
Overrakud 0.59 —		0.60 —		0.52 —	

Men 0.59, 0.60 og 0.52 Svovl fordrer respektive 2.34, 2.38 og 2.06 Kobber. Der kan saaledes ikke være mere end 3.44, 3.735 og 3.87 frit metallisk Kobber. Forholdet imellem Kobber og Svovl kommer saaledes til at blive

		m	r
			ikke under
af Analyserne	E	1.975	2.075
—	Fa	2.047	2.151
—	Fb	2.039	2.130

Da man nu af alle tre Analysegrupper har fundet, at Forholdet imellem Cu og S i den egentlige Svovlforbindelse er anderledes i den magnetiske Del end i Residuet, saa kan antagelig denne Anomali ikke forklares paa anden Maade, end at der i Stenen foruden metallisk Jern (Kobolt) og Kobber samt oxydiske Dele desuden optræder Svovlmetaller af forskjellig Art. Det er sandsynligt, at der i Virkeligheden finder en større

Forskjel Sted imellem Sammensætningen af det egentlige Svovl-metal i den magnetiske Del og i Residuet end den, der har kunnet paavises. Thi dels hidrører vel lidt af det ved Analysen fundne Jern fra opløst oxydisk Jern, der saaledes ikke har kunnet være i Forbindelse med Svovl, dels har vel ogsaa noget metallisk Kobber fulgt med Magneten og derved forøget Kobbermængden i den magnetiske Del.

No. 15. **Søileformig afsondret Skjærsten i en Sulunaa, Falun.**

Det var mig paafaldende, at denne Sten ikke viste sig paramagnetisk.<sup>1)</sup> Jeg fandt det derfor af Interesse at lære dens chemiske Sammensætning at kjende ved en Analyse. Resultatet var følgende:

G		
Svovl . . .	35.35	
Jern . . .	59.80	
Zink . . .	0.16	
Kobolt } . . .	0.19	
Nikkel } . . .		
Kobber . . .	2.94	
Slag . . .	1.58	
<hr/>		
Sum	100.02	

Zn, Co (Ni) og Cu behøver respektive 0.08, 0.10 og 0.74 Svovl for at danne  $\text{ZnS}$ ,  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Co} \\ \text{Ni} \end{smallmatrix} \right\} \text{S}$  og  $\text{Cu}_2\text{S}$ . Der bliver saaledes tilbage til Jernet  $35.35 - 0.92 = 34.43$  Svovl, hvorved findes, at Æquivalentforholdet imellem Svovl og Jern er som 1:0.992. Jernet optræder altsaa som FeS.

<sup>1)</sup> Det maa bemærkes, at det Materiale, jeg kunde raade over, var af saa ringe Mængde, at jeg ikke kunde foretage noget magnetisk Veiningsforsøg, men maatte indskrænke mig til at undersøge, hvorvidt noget af Stenpulveret heftede sig til Magneten.

## No. 8. Raasten (Skjærsten), Kaafjorden.

Et af de Resultater, der syntes at fremgaa af de forhen anførte optiske og magnetiske Forsøg med Stenene, var det, at der hos enkelte af dem maatte være tilstede et andet paramagnetisk Legeme end metallisk Jern eller Nikkel, for at deres magnetiske Egenskab skulde kunne forklares. Et af de Nummere, som saaledes viste sig mærkelig ved sin Mangel paa udskilt Jern eller Nikkel og tillige ved sin høie Paramagnetisme, var Raasten fra Kaafjorden, hvor man benytter eller har benyttet den Engelske Flammeovnsmeltning ved Tilgodegjørelsen af Kobberertsene. I og for sig var Fraværelsen af disse Metaller i udskilt Form et Faktum, som man maatte formode; thi Analyser af Raasten fra denne Proces viser nemlig, at Svovlet er mere end tilstrækkeligt til med Kobber at danne Halvsulfuret og med Jern, Kobolt o. s. v. Sulfuret, hvorved intet frit Jern, Nikkel skulde kunde være forhaanden. Jeg antog derfor Muligheden af, at Haandstykket No. 8 kunde være af en anden Sammensætning, men dette vilde først kunne afgøres ved en kemisk Analyse, som jeg derfor foretog med følgende Udfald:

H	
Svovl . . .	25.51
Jern . . .	28.55
Kobolt . . .	1.25
Nikkel . . .	0.42
Kobber . . .	33.18
Residuum . .	9.94
<hr/>	
Sum	98.85

Jernet behøver 16,31, Kobolten og Nikkelen 0.90 Svovl for at danne Sulfuret og Kobberet 8.37 Svovl for at danne Halvsulfuret, tilsammen 25.58 Svovl. Analysen har 25.51 Svovl. Noget Jern kan derfor ikke være udskilt. Derimod angiver Analysen et temmelig betydeligt Residuum, næsten 10

Procent. Dette viste sig før Glødningen og Veiningen i høj Grad at blive tiltrukken af Magneten. Efter Glødningen fandtes af det Gram Stenpulver, hvoraf forøvrigt kun Svovlet bestemtes, 0.0984 og af det andet Gram 0.1003 Gram Residuum, i Middel som anført 9.94 Procent. Det 0.0984 Gram vægtige Residuum lod sig med stor Lethed opløse i ophedet Saltsyre, og den dannede klare Opløsning efterlod efter dens Inddampning til Tørhed 1.3 Milligram Kiselsyre. Filtratet fra Kiselsyren bundfældtes med Ammoniak, efterat der iforveien var det tilsat i ophedet Tilstand lidt rygende Salpetersyre, og beholdtes 0.0975 Jernoxyd, der tilsammen med 0.0013 Kiselsyre giver 0.0988, blot 0.4 Milligram mere, end man erholdt umiddelbart af det glødede Residuum. En anden Portion Residuum veiede, efterat være ophedet til noget over 100 Grader, 0.1913 Gram. Det glødedes under Luftens Adgang, indtil en konstant Vægt erholdtes, der var 0.1950. Man ser at en Vægtføregelse har fundet Sted, men dog ikke i den Grad, at man kan antage, at Residuet foruden Kiselsyre — antagelig 0.0025 — blot bestod af  $\text{FeO}$   $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , thi da skulde man have erholdt 0.1978 Gram.

Det synes heraf med høj Grad af Vished at følge, at det er det i Stenen indlemmede jernoxydulholdige Legeme, der fremkalder dens Paramagnetisme.

Denne Sten fra Kaafjorden er dog ikke enestaaende i saa Henseende. I No. 36 Blysten Altenau fandtes i 1 Gram 0.2137 Gram Residuum, der før Glødningen viste sig temmelig stærk magnetisk. Det behandledes og forholdt sig paa samme Maade som No. 8. Kiselsyregehalten var 2.7 Milligram og Jernoxydet veiede 0.2149 Gram. Da  $0.2149 + 0.0027$  er lig 0.2176, saaledes 3.9 Milligram større end det umiddelbart erholdte Residuum, saa har dette endnu indeholdt noget Jernoxydul.

I Raastenene No. 17, 18 og 19 fandtes respektive 3.71, 4.38 og 3.42 Procent Residuum, hvoraf det tilhørende No. 17 og No. 19 viste sig før Glødningen meget stærk paramagnetisk. En Undersøgelse af Residuet fra No. 18 i saa Henseende

forseemtes. Alle 3 Residuer opløste sig med Lethed i ophedet Saltsyre til en klar Vædske.

Jeg er forvisset om, at nogen Forvexling af udekomponeret Stenpulver og Residuum ikke har fundet Sted. Det sidste bliver liggende rolig paa Bunden af Bægerglasset — om man i et saadant foretager Dekompositionen — uden at fremkalde nogen Udvikling af Gas, imedens det egentlige Stenpulver er i en uophørlig Bevægelse, indtil det bliver dekomponeret. Hvad der foranlediger disse Bemærkninger, er det, at man i de metalurgiske Lærebøger og andre Skrifter, hvor Analyser af Sten ere anførte, sjelden vil se angivet noget Residuum eller Slag som Bestanddel af Stenen, og at, hvis saadan Bestanddel er angivet, dens Mængde da er meget ringe. Dette beviser dog ikke, at de Stene, hvis Sammensætning man har bestemt, har været ganske eller mestendels fri for indlemmede oxydiske Substantser, men blot at vedkommende Kemiker ikke har faat noget eller kun et meget lidet Residuum. Men dettes Størrelse er afhængig af Dekompositionsmethoden. Anvender man Kongevand eller chlorsurt Kali og Saltsyre, antager jeg forvist, at man i de allerfleste Tilfælde vil faa Alt fuldstændig opløst med Undtagelse af lidt Svovl. Rimeligvis har man benyttet en af disse to Methoder, og ikke chlorsurt Kali og Salpetersyre, som jeg har anvendt.

Uagtet der ved Udførelsen af de fleste af de i denne Afhandling anførte Analyser, er fundet et ikke ubetydeligt Residuum (Slag), saa tvivler jeg dog ikke paa, at det i mange Tilfælde er fundet for lidet. Bestaar den i Stenen indlemmede Surstofforbindelse hovedsaglig af Jernoxyd og Jernoxydul, saa kan det ikke forundre os, at nogen Del af den er bleven opløst. Analyserne selv synes at bekræfte dette. Betragte vi Summen af Analyserne Aa, Ab og D, der er for:

	(r)	(s)	(m)
Aa .	98.88	98.51	98.43
Ab .	99.41	98.94	97.79
D .	100.21	99.64	98.92

saa ser man, at den er størst ved Analyserne (r) — den udskilte Svovlforbindelse — lidt mindre ved Analyserne (s) — det oprindelige Stenpulver — og mindst ved Analyserne (m) — den magnetiske Del. Ligesaa har af Analyserne E, Sporsten Røros, (r) — Residuets fra Magnetuddragningen — en større Sum end (m) — den magnetiske Del. Jeg forklarer dette Forhold saaledes. I Stenen har der været fordelt en oxydisk Substant, hovedsagelig bestaaende af Jernets Oxyder, men af ulige Sammensætning. Paa et Sted har der blot været Oxyd eller stærkt basisk Silikat, paa et andet en Forbindelse af Oxyd og Oxydul. Ved Adskillelsen ved Hjælp af Magneten fulgte med denne saavel de paramagnetiske Metaller, som de paramagnetiske oxydulholdige Dele, imedens Oxydet blev liggende tilbage. Ved Dekompositionen er det sandsynligt, at der blev mere opløst af de oxydulholdige Dele end af Oxydet. Det Jern, som Analyserne angiver, har saaledes almindelig et tredobbelt Udspring, nemlig dels ifra det metalliske Jern, dels ifra Jernsulfuret og dels endelig fra Jernets Oxyder. Men da man ikke ved, hvormeget der kommer paa de sidstes Konto, saa har man ikke kunnet tage noget Hensyn dertil, men betragtet alt Jern som tilhørende en Ikkesurstofforbindelse. Da saaledes det Surstof, der tilhører Oxydet, ikke veies med, bliver Analysens Sum mindre, end den skulde være, og det er klart, at ved Udførelsen af de Analyser, hvor mest af Jernets Oxyder opløses, vil man ogsaa faa mindst Sum eller mest Tab.

Analyserne Fa og Fb ere foretagne af samme Material. Deri er fundet:



## Fa

	s	m	r
Jern . .	19.73	25.28	18.09
Uopløst .	6.07	7.87	4.85

## Fb

	s	m	r
Jern . .	20.45	25.88	17.77
Uopløst .	5.61	6.79	5.09

Sammenligner man Fa,s med Fb,s, finder man, at der i Fa,s er mindre Jern, men mere Uopløst end i Fb,s. Ligeledes indeholder Fa,m mindre Jern, men mere Uopløst end Fb,m. Derimod har Fa,r mere Jern, men mindre Uopløst end Fb,r. Naar Jernmængden voxer, aftager det Uopløste og omvendt.

Af Analyserne B ser man, at a har en større Sum — 99.38 — og tillige en større Mængde Slag — 6.92 — end b med respektive 98.44 og 3.80. Differensen imellem Slagsmængderne er 3.12. Anser man denne Differens for at være Jernoxydul, saa indeholder den 1.99 Jern og 1.13 Surstof. Antager man, at Analysen b rigtigst skulde have et ligesaastort Residium som a, men at 3.12 Dele Jernoxydul var bleven opløst, saa maa man fra den i Analysen b angivne Jerngehalt 60.34 trække 1.99 og til Residuet 3.80 lægge 3.12. Sammenstilles Analysen saaledes corrigeret ved Siden af a, faar man:

	a	b	
Svovl .	28.75	28.75	
Jern . .	58.77	58.35	} 58.96
Kobolt }	—	0.61	
Nikkel }			
Kobber .	4.07	3.91	
Bly . .	0.28	0.45	
Sølv . .	0.58	0.58	
Slag . .	6.92	6.92	
Sum	99.38	99.57	

en Sammensætning af Stenen, der utvivlsomt mere nærmer sig den sande end den, som før er anført.

I femte Hefte af Polyteknisk Tidsskrift for 1872 har jeg i en Afhandling betitlet: «Om Kuls og Svovlkises reducerende Indflydelse paa den ved Raasmeltningen ved Kongsbergs Selvværks Smeltehytte tilsatte Tyndslag», i Anledning af nogle Smeltninger foretagne med Svovlkis og Tyndslag i 4 forskellige Forhold, anført Analyser af den derved erholdte Sten. Disse Analyser anfører jeg ogsaa her, da de ere meget oplysende med Hensyn til Stenens Indhold af Slag og dennes Opløselighed.

	1	2	3	4
Svovl . .	27.93	31.40	34.13	35.68
Jern . .	57.41	59.44	62.72	62.06
Uopløst .	11.09	6.90	1.22	1.17
Sum	96.43	97.74	98.07	98.91

Det viser sig heraf, at jo mindre Analysens Sum er, desto større er det erholdte Residuum. Undersøger man Æquivalentforholdet imellem Svovl og Jern, findes det at være:

for 1 som	1:1.175
- 2 —	1:1.08
- 3 —	1:1.05
- 4 —	1:0.994

Da der ved Smeltningerne, der foretoges i franske Chamottedigler med tilklinet Laag, ikke var andre Stoffe tilstede end pulveriseret Svovlkis og pulveriseret Slag, blandet med hinanden efter Analysernes Orden i Forholdene 3.5 og 21, 6 og 18, 9 og 15, og 12 og 12, saa er det ikke muligt at forstaa, at Jern i metallisk Tilstand har kunnet være forhaanden i disse Stene, og da man heller ikke kan antage, at nogen lavere Jernsvovlforbindelse end enkelt Svovljern kan existere, hvilket snart end ydermere skal bevises, har man ingen anden Udvei til at forklare Tilkomsten af det Jern, som i de 3 første

Analysen viser sig at være forhaanden mere end tilstrækkelig til at danne enkelt Svovljern, end at det skriver sig fra den i Stenen indlemmede Slag. Er denne Supposition rigtig, saa finder man, at Svovlmængderne i de 3 første Analyser 27.93, 31.40 og 34.13 behøver respektive 48.88, 54.95 og 59.73 Jern for at danne FeS. Der bliver altsaa tilbage af Jern som tilhørende Slaggen 8.53, 4.49 og 2.99. Antages endvidere, at dette Jern var i Slaggen som Jernoxydul, saa maa desforuden den tilsvarende Mængde Surstof tillægges, der er  $\frac{1}{2}$  af Jernets Vægt, nemlig: 2.44, 1.28 og 0.85, og det opløste Jernoxydul bliver 10.97, 5.77 og 3.84. De corrigerede Analyser faas derfor saaledes:

	1	2	3	4
Svovl . . .	27.93	31.40	34.13	35.68
Jern . . .	48.88	54.95	59.73	62.06
Slag . . .	22.06	12.67	5.06	1.17
Sum	98.87	99.02	98.92	98.91

Analysen G af den søileformig afsondrede Skjærsten viser intet Tab, men derimod et ganske lidet Overskud. Antagelig har i denne Sten oxydisk Jern ikke været indblandet. Dette er saameget mere sandsynligt, som dens stængelformige Afsondring og Indlemmelse i Nasen synes at tyde paa, at den i længere Tid har været i glødende Tilstand. Sandsynligvis have Oxyderne, om de oprindelig have været tilstede, derved faat Tid til at dekomponere sig til Svovlsyring, der er gaat væk, og til Metal, der er bleven optaget af Svovlforbindelsen.

Sammenholder man, hvad her er udtalt i Anledning af Residuumgehalten i flere af de i denne Afhandling anførte Analyser, med Stenenes før beviste paramagnetiske Egenskaber, saa synes det at fremgaa med høi Grad af Sandsynlighed, at Jernets Oxyder er en af Stenenes stadigste Bestanddele, om end deres Mængde kan være meget ringe, som i de paa Kobber rige men paa Jern fattige Kobberstene.

Jeg vil nu gjøre Rede for, at jeg, ikke engang hypotetisk, har henført nogen af Jernets Undersulfureter som Bestanddel af Stenene. De have almindelig været antagne som eksisterende ligesiden 1822, da Arfvedson i en Afhandling i det kongelige Videnskabsakademis Skrifter i Stockholm omtalte deres Fremstilling og bestemte deres Sammensætning, og skulle de desuden efter ham tiltrækkes stærkt af Magneten. Senere har dog Ingen, saavidt mig bekjendt, gjentaget Arfvedssons Forsøg eller paa anden Maade fremstillet Undersulfureter af Jern. Ved Undersøgelsen af No. 32 Raasten fra Kongsberg og Jernsuggen sammestedsfra, der begge befandtes at besidde en saa stor Rigdom paa metallisk Jern, forekom det mig i høi Grad paafaldende, at Jernet som saadant kunde bestaa ved Siden af enkelt Svovljern, hvis halvt Svovljern eller en endnu lavere Svovlforbindelse virkelig eksisterte under Glødhede. Jeg foresatte mig derfor at gjentage Arfvedssons Forsøg, og dette Forsæt har jeg ogsaa udført.

For at fremstille Jern-Halvsulfuret ophedede Arfvedson vandfrit svovlsurt Jernoxydul i et almindeligt Kuglerør, idet en Strøm af Vandstofgas lededes over. Men inden jeg gaar over til at beskrive de Reduktionsforsøg, jeg har anstillet, tror jeg, det kunde være af Interesse at undersøge, om det kan være sandsynligt, at man ved Reduktionen af vandfrit svovlsurt Jernoxydul paa den omtalte Maade, kan erholde et ensartet Produkt. Ophedes Jernvitriol, indtil Krystallisationsvandet er gaat væk, faar man et meget voluminøst Pulver. I alle Fald er det Tilfældet, naar man benytter Jernvitriol, der er udfældet ved Hjælp af Spiritus og saaledes iforveien har været pulverformig. Har Kuglen, hvori det vandfri Salt kommer til at ligge, det almindelige Gjennemsnit imellem 25 til 30 Millimeter, og man benytter omtrent samme Qvantitet som Arfvedson (1 Gram) af det vandfri Salt, vil dette fylde den nederste Halvpart af Kuglen eller noget under. Sættes Kuglerøret i Forbindelse med Vandstofapparatet, og man lader Vand-

stofgasen strømme igjennem førend Ophedningen, saa synes det, at der vil medgaa lang Tid, inden den atmosfæriske Luft kan komme væk. Thi det er klart, at Vandstofgassen vil strømme over Saltet og ikke ind i Saltet, baade fordi den er saa betydelig lettere end Luften, fordi den Vei er den korteste, og fordi den Modstand, som et pulverformigt Legeme udøver mod en Gasarts Passage igjennem det, er temmelig betydelig. Paa Grund af Diffusionen vil omsider ogsaa Vandstofgassen trænge ind imellem Pulverets Porer. Man begynder nu at opheide, og den Del af Glaskuglens Indre, hvortil Vandstofgassen har vanskeligt Adgang, dens nederste Del, ophedes først, og længe vil det ikke vare, inden den gløder. Var det svovlsure Jernoxydul et Salt, der ikke lod sig dekomponere ved en høiere Temperatur, vilde den vanskelige Tilkomst af Vandstofgassen til det Indre af Pulveret ikke bevirke andet, end at der vilde medgaa en saameget længere Tid, inden Reduktionen blev fuldendt. Men da Saltet temmelig let lader sig dekomponere under den anvendte Temperatur, saa vil Følgen ogsaa blive, at det dekomponerer sig, og den Gas, som derved udvikler sig, vil ganske forhindre, at Vandstofgassen trænger ned. En Del af Svovlsyren vil paa Grund af Jernoxydulets Tilstedeværelse spaltes sig og afgive et Æquivalent Surstof til Jernoxydulet, der derved forandres til Jernoxyd, imedens den selv samtidig desoxyderes til Svovlsyring efter Formlen  $2\text{FeOSO}_3 = \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{SO}_3 + \text{SO}_2$ . Derefter vil det basiske Jernoxydsalt give Slip paa sin Svovlsyre og lade Jernoxyd blive tilbage. Det Skikt, hvor denne kemiske Aktion foregaar, vil rykke høiere og høiere op og først forsvinde, naar Vandstofgassen bliver saa rigelig, at en Reduktion kan foregaa. Er Saltets Dekomposition tilendebragt, saavidt det ske kan, vil Vandstofgassen efterhaanden trænge sig dybere og dybere ned, men nu forefinder den ikke længere noget svovlsurt Jernoxydul, men blot Jernoxyd, hvorpaa den kan yttre sin reducerende Indflydelse, og Resultatet bliver derfor i de nedre Dele af Kuglen me-

tallisk Jern, istedetfor en Forbindelse af Svovl og Jern. Sandsynligheden taler saaledes temmelig tydelig for, at man ikke vil erholde noget ensartet Produkt, men baade metallisk Jern og en Svovlforbindelse. Hvilken Forbindelse denne bliver, er det vanskeligt paa Forhaand at danne sig nogen Mening om. Holder  $\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{SO}_3$  sig uforandret, indtil en Reduktion kan foregaa, da skulde  $\text{Fe}_2\text{S}$  fremkomme, hvis en saadan Forbindelse gives, men sandsynligere er det, at de øvre Lag af  $\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{SO}_3$  modtage Svovlsyre fra de nedenunder liggende — idet disse dekomponeres, — og gaa over til  $\text{Fe}_2\text{O}_3 + 2\text{SO}_3$  eller  $\text{Fe}_2\text{O}_3 + 3\text{SO}_3$ . Vi kunne derfor ogsaa tænke os  $\text{FeS}$  og  $\text{Fe}_2\text{S}_3$  eller endnu høiere Sulfureter som Reduktionsprodukter. De flygtige Produkter, som antagelig maa kunne danne sig, ere Vand, Svovlsyring og Svovlsyre.

Jeg har her udkastet et Billede af den Proces, man maa tænke sig vilde foregaa, naar vandfrit svovlsurt Jernoxyd skal reduceres i et Kuglerør ved at lade Vandstofgas strømme over. Men dette Billede gjengiver ogsaa fuldstændig Processen, som den virkelig foregaar. Man erholder efter Reduktionen to Produkter, der baade med Hensyn til deres Beliggenhed og deres Ydre ere skarpt skilte fra hinanden. Det ene, der danner en tynd Skorpe af den i Kuglen fritliggende Del af det Reducerte, bestaar af ganske smaa sammensintrede, sprøde, noget glindsende Korn af en broncegul Farve som almindelig Raasten; det andet, der ligger under det første og forøvrigt begrænses af det indvendige af Glaskuglen, danner en mat svampagtig Masse af en graaligsort Farve. Sammenhængen eller Adhæsionen imellem Delene af denne Masse er af saadan Beskaffenhed, at det er umuligt at faa den fordelt til et løst Pulver. Hvad der endvidere skiller disse to Legemer ad, er deres Forhold til Magneten: det broncegule — Svovlmetallet — tiltrækkes ikke af Magneten, imedens det graaligsorte — Jernet — tiltrækkes i meget høj Grad.

Den Jernvitriol, der benyttedes til Forægene, var udfældt

ved Hjælp af Spiritus og senere tørret. Den indveiedes som saadan i det samme Kuglerør, hvori Reduktionen senere foretoges. Først blev dens Krystallisationsvand forjaget under en lavere Temperatur, og naar dette var sket, ophededes til Glødnings. Under begge Ophedninger lededes Vandstofgas over. Dog blev et Forsøg ogsaa foretaget i et Roses Vandstofapparat. Indveiet blev 3.3175 Gram Jernvitriol. Nogen Reduktion foregik ikke, da Temperaturen var for lav, og Resultatet blev blot Jernoxyd, hvoraf erholdtes 0.9597 Gram. Efter Beregningen skulde man have faaet 0.9547 Gram. Forsaavidt har dette Forsøg sin Interesse, saasom det beviser, at Jernoxydulet i Saltet oxyderer sig paa Svovlsyrens Bekostning. Jeg vil ikke undlade at bemærke, at Vandstofgasen før dens Benyttelse befriedes fra sin Fugtighed ved at ledes baade igjennem concentreret Svovlsyre og et Chlorcalciumrør. Følgende Tabel viser Resultatet af de øvrige 6 egentlige Reduktionsforsøg:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Anvendt Jernvitriol.	Beregnet.	Rundet efter Op- hæft i (1).	Jern i (1) beregnet.	Det Reducerte.	Udskilt Jern.	Udskilt Svojljern.	Svojljern med Hjst metallisk Jern.	Svojl i (6).	Svojl i (7).	Svojl i (8).	Svojl i (6) + (7) + (8).	(6) — (4) i Procent af 5.	(5) — (4)
Gram.	Gram.	Gram.	Gram.	Gram.	Gram.	Gram.	Gram.	pCtr.	pCtr.	pCtr.	pCtr.		Gram.
1 2.1245	1.1616		0.4280	0.4485	0.4155	0.0110		2.35	34.31		3.14	4.57	0.0205
2 2.4125	1.3191		0.4859	0.5340	0.4520	0.0653		3.08	35.16		5.84	9.01	0.0481
3 4.1793	2.2851	2.3570	0.8417	0.8990	0.8183	0.0423	0.007	5.68	36.64		7.20	6.37	0.0573
4 1.8855	1.0304		0.3800	0.3885	0.3660	0.0033	0.002	Svagt Spor	36.36		0.32	2.14	0.0085
5 3.8020	2.0790		0.7658	0.7905	0.6956	0.0230	0.047	1.01	37.69	20.85	3.34	3.12	0.0247
6 4.0327	2.2049	2.2335	0.8122	0.8747	0.6823	0.0866	0.087	0.83	36.26	18.43	6.20	7.15	0.0625

Man ser af Rubrik (12) i denne Tabel, at Svojllets Mængde i den hele reducerede Masse ikke i noget Forsøg gaar høiere op end til 7.2 Procent, det er som 1 Æquivalent Svojl til 7.4 Æquivalenter Jern.

Rubrik (7) indeholder Vægten af det Svojlmetal, som ved



Hjælp af Magneten blev fraskilt den samlede reducerede Masse. Dets Mængde er ganske ubetydeligt. Svovlet deri blev med Undtagelse af det 4de Forsøg bestemt som svovlsur Baryt. Ved Forsøgene (1) og (2) havde jeg undladt at anvende den størst mulige Skrupuløsitet for at adskille det metalliske Jern fra Svovlmetallet. Ved Forsøg No. 4 var Mængden af det erholdte Svovljern saa ubetydelig, at jeg lod mig nøie med det Resultat, jeg fik ved at røste det til Jernoxyd. Forsøget No. 5 gav ogsaa en liden Qvantitet Svovlmetal. Jeg bestemte Svovlmængden i den ene Halvpart som svovlsur Baryt og Jernmængden i den anden Halvpart ved Røstning som Jernoxyd, men jeg erholdt kun lidet overensstemmende Resultater. Den direkte Svovlbestemmelse gav 33.83 Procent og den indirekte 41.55, Middel som anført 37.69. Det bliver saaledes kun de 2 Bestemmelser henhørende til Forsøgene No. 3 og No. 6 tilbage, der kan anses for at være ulastelige. Tager man det simple Middeltal af disse 2 Svovlgehalter, faar man 36.45. Men da Nøjagtigheden ved Bestemmelsen af saa smaa Qvantiteter ganske vist staar i ligefremt Forhold til Vægtmængden af den undersøgte Substant — alle Omstændigheder forevrigt lige — saa burde egentlig den sidst fundne Procentmængde (No. 6) omtrent have dobbelt saa stor Indflydelse (Vægt) som den første (No. 3), det vil sige, man multiplicerer 36.26 med 0.0866 (Kolonnen 7) og 36.64 med 0.0423 (samme Kolonne) og dividerer Summen af Produkterne med  $0.0866 + 0.0423 = 0.1289$ , hvorved erholdes 36.385. I denne Svovlforbindelse forholder Svovlets Æquivalent sig til Jernets som 1:1.001. Det erholdte Svovljern er saaledes som ved Stenen enkelt Svovljern. Det var min Hensigt ogsaa at bestemme Jernet direkte, men en ringe Gehalt af Arsensyre i den Saltsyre som Laboratoriet dengang var i Besiddelse af, gjorde Resultaterne ubrugbare. Efterat have modtaget ren Saltsyre blev Arsensyren af en Opløsning af det allerede veiede Jernoxyd (Forsøg (6) 2

Gange udfældt med Svovlvandstof, men alligevel erholdtes et Overskud i Analysen. Af Svovl erholdtes som før angivet

36.26

af Jern 64.78

---

Sum 101.04

I Rubrik (10) er Svovlets Mængde i det udskilte Jern angivet. Man ser, at denne af de 3 første Forsøg er fundet ikke ubetydeligt større end i de 3 sidste. Uagtet nu Jernet lader sig tiltrække af Magneten, men Svovljernet ikke, saa havde det dog sin store Vanskelighed at skille dem ifra hinanden, thi var først noget af Svovlmetallet kommen ind i og bleven bestøvet af Jernet, da var det besværligt eller rettere sagt næsten umuligt senere at faa det frem. Ved de 3 første Forsøg var jeg ikke saa nøie opmærksom paa dette Forhold, og af den Grund kom der mere af Svovlmetallet i Jernet end i de 3 følgende Forsøg. Ved disse sidste blev Svovljernet ved dets Udtagelse af Glaskuglen saavidt muligt lagt for sig og ikke blandet om med Jernet. Nøie at faa Svovlmetallet ud var ikke muligt. En direkte Bestemmelse af det rene Jern i det udskilte Jern haves ved Forsøg (3): det reducirte Jern deltes i 2 lige Portioner; af den ene Portion bestemtes Svovlet, af den anden Jernet, og erholdtes:

Svovl . 5.68

Jern . 94.23

---

Sum 99.91

der kom blot Salpetersyre til Opløsningen.

Det sandsynligste Resultat, man kan uddrage af disse Forsøg, er, at det Reducerte bestaar af 2 Dele: metallisk Jern og enkelt Svovljern, og at det Svovl, som findes i det metalliske Jern, hidrører fra senere ved Udtagelsen af Glaskuglen indblandet enkelt Svovljern.

Hvad de flygtige Bestanddele, der udviklede sig under Reduktionen, angaar, bemærkedes Vand, Svovlsyre, Svovl,

Svovlsyring og Svovlvandstof. Svovlsyre viste sig som et Destillat i Glasrøret ved flere af Forsøgene, antagelig ved dem alle. Ved 5te Forsøg blev den undersøgt og erkjendt. Svovlsyringen fremkommer især i Begyndelsen, derimod synes Svovlvandstoffet at være tilstede under den hele Proces og tildels samtidig med Svovlsyringen. Jeg antog, at jeg tydelig ved Lugten kunde erkjende begge disse Gasarter som tilstedeværende paa en Gang. Svovlvandstoffets Dannelse er mig forøvrigt temmelig uklar. Antagelig skriver det Svovl sig fra allerede færdig dannet Svovljern. Dette kan man tænke sig dekomponeret enten ved H til Fe og SH, eller ved Vandgas til FO og SH, eller ogsaa ved  $\text{SO}_2$  til  $\text{FeOSO}_3$  og SH. Svovlet er vel fremkommen som et Produkt af Svovlvandstoffets og Svovlsyringens gjensidige Dekomposition. Ved et Forsøg var Destillatet ganske melkagtigt.

Det følger af, hvad jeg har anført angaaende Reduktionen af  $\text{FeOSO}_3$ , at der hersker megen liden Overensstemmelse imellem Arfvedsons og mine Forsøg. Især er det paafaldende, at han har fundet saameget mere Svovl tilbage i det Reducerte end jeg. Det har senere faldet mig ind, at maaske denne Forskjel lod sig forklare derved, at jeg sandsynlig har anvendt en noget høiere Temperatur end han, hvorved mere af Jernsaltet dekomponeredes ved Varmen, og mere Jernoxyd blev tilbage. Til Ophedningen benyttedes af mig rigtignok blot en Bunsens Brænder, men over Glaskuglen var holdt en bøiet Skjærm af Jernblik for at reflektere Varmen, hvilket ganske vist har forøget Temperaturen. Man savner hos Arfvedson Oplysning om, hvorvidt den anvendte Vitriol var ganske vandfri, og derpaa er hele hans Forsøg baseret, thi nogen kemisk Analyse af det Reducerte foretog han ikke. Men det er vanskeligt at faa Vandet fuldstændig væk, naar ingen Dekomposition af Saltet skal finde Sted. Foruden de Bestemmelser af antaget vandfri Vitriol, der staa i sidst anførte Tabel i 3die Rubrik, har jeg ogsaa en tredie, hvor jeg af 3.3175 Gram Vitriol erholdt

efter en meget langvarig Ophedning 1.9767 Gram tilbage, men skulde havt 1.8139 Gram. Desuden stemme hans to Forsøg, saaledes som de ere udførte, heller ikke godt overens. Af det ene finder han indirekte 22.17 Procent Svovl, hvilket svarer næie til  $\text{Fe}_2\text{S}$  — 1 Æquivalent Svovl til 2.006 Æquivalenter Jern — men af det andet faar han 20.18 Procent, der er som 1 Æquivalent Svovl til 2.260 Æquivalenter Jern eller nærmest som  $9\text{Fe} + 4\text{S}$ .

Jeg har i denne Afhandling forhaabentlig tilstrækkelig bevist, at det Hytteprodukt, man kalder Sten, imod den sædvanlige Antagelse er en uensartet Masse, almindelig bestaaende af Svovlmetaller, regulinske Metaller og oxydiske Forbindelser; at hver af disse 3 Hovedbestanddele atter mekanisk lader sig dekomponere i forskellige Dele, hvis Tilstedeværelse kan erkjendes dels ved Synet, dels paa anden Maade; dernæst at Stenen i de fleste Tilfælde viser sig paramagnetisk, hidrørende fra de indblandede Metaller Jern, Nikkel, Kobolt eller fra indblandede jernoxydulholdige Substanser; og endelig at ingen lavere Forbindelse af Svovl og Jern end enkelt Svovljern,  $\text{FeS}$ , forekommer i Stenen eller overhovedet lader sig fremstille paa tør Vei.

Hvad Undersulfureter af Bly angaar, hvis Tilværelse altid har forekommet mig tvivlsom paa Grund af det mindre sandsynlige i, at en kemisk Forbindelse blot kan have Bestand i en høiere Temperatur, imedens den spalter sig i en lavere, saa bemærker Rammelsberg i sin Oversættelse og Bearbejdelse af Percys Metallurgi om Blyet, Side 28, at mangfoldige Forsøg af Percy, hvoraf et udført af Dick og Smith anføres, godtgjøre, at Bly og Svovlbly kunne sammensmeltes i alle Forholde til et tilsyneladende homogent Fluidum, der dog ved en langsom Afkøling atter skiller sig ad i temmelig rent Bly og Svovlbly. Vi kunne saaledes heller ikke antage, at Undersulfuret af Bly er tilstede i stivnet Sten.

Det følger af de foran anførte Undersøgelser med Hensyn

til dette Hytteprodukt, at Meninger, der ere baserte paa Tilstedeværelsen i dette af lavere Svovlforbindelser af Jern, Bly o. s. v. end  $\text{FeS}$ ,  $\text{PbS}$  o. s. v., ikke nu længere kunne godkjendes, og at andre Anskuelser, der paatvinge sig En af selve Kjendsgjeringerne, idetmindste for Jernets Vedkommende, maa gjøre sig gjeldende. Men førend jeg gaar over til noget næiere at diskutere Jernets og Kobberets saa hyppige Forekomst i Stenen, anser jeg det ikke urigtigt at forudskikke nogle fåa Bemærkninger angaaende den metallurgiske Smeltning.

Iblandt de under almindelig Temperatur forekommende flydende Legemer, gives der nogle, der i alle mulige Forholde kunne blandes med hverandre til et homogent Fluidum som Vand og Alkohol, og forskjellige Olier; andre kunne blandes blot tildels som Brom og Vand, Brom og Saltsyre, og atter andre kunne ikke blandes med hinanden som Olie og Vand. Noget Lignende finder ogsaa Sted hos de Legemer, som først under en meget høi Temperatur kan antage den fluide Form. Saaledes danne flere af Metallerne, Svovlmetallerne, Arsenmetallerne samt Oxyderne og Silikaterne i flydende Tilstand fire Grupper af kemiske Legemer, der hver for sig i denne Tilstand kunne blande sig indbyrdes med hinanden til en mere eller mindre homogen Masse; men derimod forholde de forskjellige Grupper sig til hinanden i det Hele taget som Brom og Vand eller som Olie og Vand. Hver Gruppe for sig har en Slags Isomorfi i udvidet Forstand, imedens Grupperne imod hinanden optræde dimorfe. Dersom de røres om med hverandre i et begrændset Rum, ville de efterhaanden skille sig ad efter deres specifikke Vægt i saamange Lag som der er Grupper, og under sædvanlige Forholde kommer Metallerne underst, dernæst Arsenmetallerne, saa Svovlmetallerne og øverst de oxydholdige Silikater. Muligt kunde dog under denne Operation Grupperne kemisk reagere paa hinanden, hvorved deres Sammensætning turde forandres.

Denne Legemernes forskelligartede Beskaffenhed danner paa enkelte Undtagelser nær det egentlige Grundlag for deres

Adskillelse ved Smeltning, og de Midler, man anvender for at fremkalde de ulige Grupper, er almindelig meget simple.

Kommer denne Grupperings-Lov til Anvendelse, saaledes som det sker i de metallurgiske Værksteder, er den dog underkastet flere Modifikationer. Temperaturen er almindeligvis ikke saa stor, at de angjældende Legemer opnaar saa stor Flydenhedsgrad, som de kan antage, hvorved noget af den ene Gruppe indlemmes mekanisk i den anden. Eller der levnes dem ikke den tilbørlige Tid, førend de stivne, til at en Adskillelse kan finde Sted. Endvidere nogle af Grupperne staa hinanden ikke saa fjernt, at ikke den ene i nogen Grad kan opløses af den anden — som Brom af Vand eller Saltsyre — uden at dog derved, som det synes, nogen inderligere kemisk Forening foregaar. Evnen til at opløse tiltager formodentlig med Temperaturen, og under Afkølingen udskiller fortrinsvis det Legeme sig først, som har det høieste Smeltepunkt. Det er ikke usandsynligt, at en og samme Krystalform hos Legemer, der henhører under forskellige Grupper, kunne bidrage til deres gjensidige Opløsning. Kobber opløser Kobberoxydul, Bly Svovlbly og omvendt. Cu og  $\text{Cu}_2\text{O}$  krystalliserer i regulære Oktaedre, Pb og PbS i Former henhørende til det regulære System, Bly i Oktaedre, Svovlbly i Terninger, men ogsaa i Oktaedre eller Combinationer af Terning og Oktaeder.

Hvad særlig Metaller og Svovlmetaller angaar, saa synes disse Grupper at staa hinanden temmelig nær og nærmere end Metaller og Oxyder. Svovlmetallerne har sædvanlig Metalglands, og nogle af dem ere tildels smidige. Det er derfor ikke saa forunderligt, at et Metal i nogen Grad kan optages eller opløses af et Svovlmetal og omvendt. At dette saaledes forholder sig, kan, forekommer det mig, neppe være omtvisteligt. Navnlig gjælder dette om Svovljern og Jern, Svovlbly og Bly, og Svovlnikkel og Nikkel. Hvorledes Forholdet er imellem halvt Svovlkobber og Kobber, maa vel endnu anses for uafgjort. Det rimeligste at antage er, at Optagelsen af Metallet i

Svovlmetallet har noget tilfælles med et Salts Opløsning i Vand. Man maa sandsynligvis tænke sig til Ex. Blyets Overførelse i smeltende Svovlbly paa den Maade, at Sveviblyet ved det metalliske Blys Tilkomst forbliver ganske uforandret, saaledes at det samme Bly, som fra først af var i Forbindelse med Svovlet, fremdeles vil vedblive at være det, imedens det tilkomne Bly paa Grund af en svag Affinitet, der grændser til en AdhæSION, vil indlemme sig imellem Svovlblyets Molekyler.

Idet vi anser det som en Kjendsgjerning, at smeltet Svovlmetal, der for det væsentligste indeholder Svovljern, opløser metallisk Jern, ville vi gaa over til at undersøge, hvilke Omstændigheder vedkommende Jernets Opløselighed i Svovljern og dets Udskillelse i samme, der maa komme i Betragtning

Vi maa antage, at Jernets Opløselighed er begrændset og desuden afhængig af Svovljernets Temperatur. Den tiltager ved større Temperaturer og aftager ved mindre. Har Svovljernet været mættet med opløst Jern under en vis høj Temperatur og denne da aftager, maa en Del Jern skilles ud i Analogi med, hvad der almindelig finder Sted med en Opløsning af et eller andet Salt i Vand. Inden Svovljernet er fuldkomment styrknet, vil alt det deri opløste Jern fuldstændig være udfældet. Jernet viser sig da i Stenen enten som rundagtige Korn af omtrent 0.1 mm. Gjennemsnit eller som naaleformige eller fjærlignende Krystaller.

Af Analyserne Aa er beregnet, at Raasten No. 32 — Bundstykket fra Stikdigelen — er sammensat af

50.84 Svovlmetal hovedsagelig FeS
46.17 Metal hovedsagelig Fe
2.99 Slag

---

100.00

hvilket ogsaa kan udtrykkes saaledes, at der til 100 Dele Svovlmetal og Slag svarer 85.80 Metal. Har denne Mængde Metal (Jern), der var fint og jævnt indsprængt i Stenen, været opløst

i 100 Dele Svovljern, maa man anse Jernets Opløselighed i Svovljern at være høist betydelig. Da jeg finder det er af Interesse at afgjøre, om en saadan Mening bør anses for antagelig eller ikke, ser jeg mig nødsaget til at gaa noget i Detail.

Af det Haandstykke af denne Raasten, der tjente til de før anførte Undersøgelser, blev der taget 5 Portioner. Først 1. hvoraf Analyserne Ab anstilledes, dernæst 2. til Bestemmelsen af den specifikke Vægt: 5.905, 3. til Analyserne Aa og 4. og 5. til de specifikke Vægtbestemmelser 5.953 og 6.010. Jeg har en temmelig sikker Formodning om, at, eftersom der sloges mere og mere af Haandstykket, aftog dettes Gehalt af Svovljern og tiltog dets Gehalt af metallisk Jern. Haandstykket var i det Hele taget ikke lidet vanskeligt at slaa itu, og desto vanskeligere jo mere Jern der viste sig indlemmet. Det følger heraf ganske naturligt, at de først afslaaede Stykker tillige vare de mindst jernholdige. Derfor anser jeg den fundne Egenvægt 5.905 at svare til en Sammensætning, der ligger midt imellem den, der er funden ved Analyserne Ab og Analyserne Aa. Da det stod mig ganske klart, at Vanskeligheden med at diminuere Raastenstykket stod i Forbindelse med Mængden af det udskilte metalliske Jern, maatte dette Jern være ulige fordelt og som en Følge deraf Stenens specifikke Vægt forskjellig paa forskjellige Steder. De to sidste Egenvægtbestemmelser ere anstillede med Materiale af Haandstykket, hvor Jernet viste sig i størst Mængde. Portionen (5) blev stykkevis afmeislet den mest jernholdige Side til en Tykkelse af omtrent 2 Linier og erholdtes paa denne Maade tilstrækkeligt Materiale — over  $3\frac{1}{2}$  Gram — til at foretage en nøiagtig Bestemmelse. Under Forudsætning af at den høiere eller lavere specifikke Vægt, man har erholdt, er en Følge af en større eller mindre Mængde af indlemmet metallisk Jern i Stenen, og at en vis Quantitet Sten og en vis Quantitet Jern tilsammen har samme Volum, enten Jernet er fordelt i Stenen



eller ikke — hvilke Forudsætninger synes berettigede — kan man, naar Sammensætningen og den specifikke Vægt af en Del af Stenen er bekjendt, beregne Sammensætningen af en anden Del, hvis specifikke Vægt er bekjendt, eller den specifikke Vægt, naar man kjender Sammensætningen.

Er  $p_1$  og  $p_2$  to Legemers absolute Vægt udtrykt i Gram og  $s_1$  og  $s_2$  deres specifikke Vægt, saa angiver  $\frac{p_1}{s_1}$  og  $\frac{p_2}{s_2}$  samme Legemers Volumindhold regnet i Kubikcentimetre. Er Legemerne i fast Sammenhæng med hinanden bliver deres samlede Vægt  $p_1 + p_2$  og kaldes dette forenede Legemes specifikke Vægt  $S$  bliver dets Volum lig  $\frac{p_1 + p_2}{S}$ . Men da det fremdeles maa besidde samme Rumindhold som begge de adskilte Legemer tilsammen faar vi Formelen

$$\frac{p_1}{s_1} + \frac{p_2}{s_2} = \frac{p_1 + p_2}{S}$$

Af Analyserne Ab og Aa findes Portionerne (1) og (3) at være sammensat

	(1)	(3)
af Svovlmetal	53.04	50.84
- - Metal . .	43.62	46.17
- Slag . .	3.34	2.99
	<hr/> 100.00	<hr/> 100.00

Ansæer man af den Grund, som før er anført, den midlere Sammensætning af (1) og (3) at repræsentere Sammensætningen af Portion (2) bliver den

Svovlmetal	51.94
Metal . .	44.895
Slag . .	3.165
	<hr/> 100.00

Sættes Svovlmetallet og Slaggen tilsammen lig 100, erholdes

Portion.	Svovlmetal.	Metal.	Specifik Vægt.
(1)	100	77.37	—
(2)	100	81.49	5.905
(3)	100	85.80	—
(4)	—	—	5.935
(5)	—	—	6.010

Antages Jernets (det udskilte Metals) specifikke Vægt lig 7.84 findes første Portions specifikke Vægt af Ligningen

$$\frac{177.37}{s} + \frac{4.12}{7.84} = \frac{181.49}{5.905}$$

hvor  $177.37 = 100 + 77.37$ ,  $181.49 = 100 + 81.49$  og  $4.12 = 81.49 - 77.37$  og heraf

$$s = 5.871;$$

tredie Portions specifikke Vægt S af Ligningen

$$\frac{181.49}{5.905} + \frac{4.31}{7.84} = \frac{185.80}{S}$$

hvor  $185.80 = 100 + 85.80$  og  $4.31 = 85.80 - 81.49$  og heraf

$$S = 5.939.$$

Ligeledes faar man af Ligningerne

$$\frac{181.49}{5.905} + \frac{p_2}{7.84} = \frac{181.49 + p_2}{5.953} \text{ og}$$

$$\frac{181.49}{5.905} + \frac{p_2}{7.84} = \frac{181.49 + p_2}{6.010}$$

Vægten af det Jern, der maa indlemmes i den anden Portion af Stenen, for at denne kan faa en specifik Vægt der er lig 5.953 og 6.010, og bliver  $p_2$  i første Tilfælde lig 6.13 og i andet Tilfælde lig 13.83. Heraf udledes at der i Portion (4) til 100 Svovlmetal og Slag svarer  $81.49 + 6.13 = 87.62$  Jern og i Portion (5)  $81.49 + 13.83 = 95.32$  Jern.

Paa denne Maade erholder man de 5 Portioners Sammensætning og specifikke Vægt at være følgende:

	Svovlmetal og Slag.	Udskilt Metal (Jern).	Specifisk Vægt.
(1)	100	77.37	5.871
(2)	100	81.49	5.905
(3)	100	85.80	5.939
(4)	100	87.62	5.953
(5)	100	95.32	6.010

Denne her udførte Beregning har jeg anset nødvendig for at vise at i det Haandstykke Raasten betegnet No. 32, hvis Længde, Brede og Tykkelse vel ikke kan have været større end 3 Tommer,  $1\frac{3}{4}$  Tomme og  $1\frac{1}{2}$  Tomme har existeret en ikke ubetydelig Forskjel i Mængden af indlemmet Jern og specifik Vægt. Antagelig angiver en af de mindste Dimensioner tillige Tykkelsen af den styrknede Stenskive.

I Raasten No. 31, der er af samme Udslog som No. 32, men taget af en af de øvre Skiver, bliver Sammensætningen, naar man for at finde den benytter den korrigerede Analyse Side (289).

Svovlmetal og Slag.	Metal.	Funden specifik Vægt.
100	11.96	5.055

Raasmeltningen udføres paa Kongsberg i 14 Fods Høj-ovne, der ere redede som Sumpovne. Beskikningen kan anslaaes til omtrent 4 Dele fattige Slige og Slam, 2 Dele Svovlkis og 5 Dele Tyndslagge foruden Røgslig og urene Slagger. Stenen dannes hovedsagelig omkring Ovnens Form og samler sig i smeltet Tilstand i Herden. Da Tyndslaggen — hvilket jeg har paavist i min før citerede Afhandling — dels ved Svovlkisens Indvirkning, dels ved Kullenes umiddelbare Reduktion leverer et ikke ubetydeligt Tilskud af Jern til Stenen, der kan ansættes til 30 à 40 Procent af dette Hytteprodukts samlede Jerngehalt, saa er der Mulighed for, at Stenen noget kan variere i sin Sammensætning. Regelen er vel den, at Kisen smelter i Berørelse med Tyndslaggen, men man kan ogsaa tænke sig, at

dette sker undertiden skilt ifra denne; ligesom man ogsaa paa den anden Side kan tænke sig, at der af Dele af Tyndslaggen undertiden reduceres Jern, uden at der samtidig er smeltende Kis i Kontakt med det. Det forekommer mig dog, at de Tilfælde, hvor Kis og Tyndslag afsondrede fra hinanden passere Smelterummet, maa høre til de sjældne og, naar de indtræffe, kun kortvarige Tilfælde. For det Første er Beskikningens uligeartede Dele blandede med hinanden og endvidere maa man lægge Mærke til, at de smeltende Stykker ere i bestandig Bevægelse, hvorved en Isolering af enkelte af dem kun vil være forbigaaende. I en Raasmeltnings Kampagne paa Kongsberg i Aaret 1859 producerte man i 130 Døgn 5404 Ctr. Raasten (Selvvægt). Dette udgjør i Minutet 1350 Gram eller i Maal, naar Stenens Egenvægt ligger imellem 5 og 6,  $\frac{1}{4}$  Liter eller omtrent 1 Pægel. Fordeler man saameget som en Pægel af smeltet Sten i en Tid af et Minut i Draaber, — hvoraf kun en ringere Del ikke har den normale Sammensætning — over Smelterummet, da bliver det sandsynligt, at allerede en stor Udjævning i Uligeartetheden vil finde Sted. Vel er det saa, at en Del af Beskikningen blandet med en Del af Kullene først vil smelte, idet den svømmer paa de allerede flydende Masser, men det kan ikke indses, at dette kan bevirke en større Uensartethed i den dannede Sten. Snarere vil derved bevirkes, at mindre af Jern vil reduceres af Tyndslaggen, da en Del af den vil opløses af den færdige Slag. Efter Smeltningen passere Stendraaberne i Form af fluide Kugler først et Lag Slag. Under denne Vandring have de uligeartede Kugler atter en Anledning til at komme i Berørelse med hinanden. Endelig forene de sig med den øvrige Stenmasse. Kommen ned i denne vil de smaa Kugler brede sig ud, uden at den Forskjel i deres specifikke Vægt fra den øvrige Masse paa Grund af deres Lidenhed og paa Grund af, at der ikke paa et og samme Sted i Herden falder ned smeltede Stenkugler af samme Sammensætning, vil kunne gjøre sig meget gjeldende.

Vil Temperaturen i Herden kunne vedligeholde sig, forekommer det mig, at der ikke kan blive uden en ringe Forskjel i Stenens Sammensætning, hvorsomhelst den er taget i Herden. Vi kan dog antage, at der eksistere nogen Forskjel. Er Herden passende fuld, foregaar Udslaget. Da Stikkanalen munder eller skulle munde i Bunden af Herden, vil, hvad der ligger dybest i denne af den smeltede Sten, først flyde over i Stikdigelen og ogsaa der indtage det dybeste Sted. Ligeledes vil de høiere liggende Skikter i Herden efterhaanden indtage de høiere liggende Skikter i Stikdigelen. Hvis der nu i Herden har eksisteret en Forskjel i specifik Vægt af Stenen, vil fremdeles nogen Forskjel kunne vedligeholde sig, men antagelig betydelig modificeret. Den, der har været Vidne til et Raastensudslag paa Kongsberg, vil indrømme, at Stenen med megen Voldsomhed farer ned i Stikdigelen og oprører det, som er kommet ned i den, i ikke ubetydelig Grad. Stenen har ogsaa til Bunden af Stikdigelen en Faldhøide af omtrent 3 Fod. Man vil derfor i Stikdigelen kun vente at finde mærkelig Forskjel i specifik Vægt af Stenen i betydeligere Niveauafstande. Operationen udelukker Muligheden af, at den fuldkommen smeltede Sten paa  $1\frac{1}{2}$  Tommes Niveauafskjel paa en Gang skulde have 5.87 og 6.01 som specifik Vægt, som var fundet i Haandstykket.

Vi have set, at Raasten No. 32 paa 100 Dele Svovlmetal og Slag holder lige til 95.32 Jern. Efter Plattner smelter almindelig Raasten ved en Temperatur af  $1047^{\circ}$  C. og Smedejern efter Wedding ved en Temperatur af  $2250^{\circ}$  C. Man kan saaledes antage, at Raasten af omtalte Sammensætning vil behøve en Temperatur af 1500 à 1600 Grader for at holde sig flydende. Omkring Formen vil Heden rimeligvis naa op idetmindste til Rujernets Smeltepunkt, men Formens ikke ringe Høide over Forherden og dennes fri Beliggenhed samt den større Brystaabning vil bevirke, at Temperaturen allerede ved det øverste af Forherden ikke lidet vil have sunket. Da den

Varme, som skal holde Stenen flydende i Herden, tilføres den ovenfra hovedsagelig ved Tilførsel af ny flydende Sten, og da denne paa Grund af sin hedere Tilstand i Almindelighed vil holde sig øverst, vil de nederste Partier af Stenen faa Anledning til at afkjøle sig. Det forekommer mig saaledes i høieste Grad sandsynligt, at en Sten saa rig paa Jern ikke vilde kunne holde sig fuldkommen smeltet paa Bunden af Herden, indtil et Udslag finder Sted. Men dette vilde være nødvendigt for at den med uforandret kemisk Sammensætning skulde komme over i Stikdigelen. Thi at den efterat Jernet allerede var udskilt, men det indblandede Svovlmetal endnu smeltet, skulde besidde Flydenhed nok til af sig selv at strømme ud af Ovnens under Udstikket forekommer mig ligefrem umuligt.

Der er altsaa efter min Formening to Ting, der taler imod, at alt det i Raasten No. 32 indlemmede metalliske Jern har været oprindelig opløst i det Svovlmetal, der nu omgiver det i fast Form nemlig: dets betydelige Mængde og dets vexlende Mængde inden et indskrænket Rum.

Til Bekræftelse for denne min Formening har jeg anstillet nogle Smeltningforsøg med en intim Blanding af pulveriseret Svovljern og Jernfilspaan. Svovljernet var af den Sort, der anvendes til Udvikling af Svovlvandstof og Jernfilspaanet var iforveien rensat dels ved Magneten og dels ved Hjælp af Alkohol. Smeltningen foretoges i en Sefstrøms Ovn med Koks som Brændsel, og dens Varighed regnedes fra den Tid, da Koksene vare komne fuldstændig i Brand — antagelig stærk Rødgledhede eller begyndende Hvidgledhede —, og til den Tid, da Blæsten standsede. Digelen blev for hver Gang fremdeles staaende i Ovnens omgivelser af de glødende Koks, indtil at Afkjøling havde fundet Sted.

1. 240 Gram pulveriseret Svovljern og 153 Gram Jernfilspaan med Tilsats af lidt Glaspulver og med et Dække af Trækul smeltedes i en fransk Charmottedigel i 38 Minuter. Digelen viste sig efter Smeltningen at være revnet paa Siden,

hvorefter en stor Del af Indholdet var gaat tabt. Tilbage var dog en 112 Gram vægtig Klump, der efter Udseendet at dømme maattet have været fuldkommen smeltet<sup>1)</sup>. Det Svovljern, der benyttedes til dette Forsøg, blev ikke undersøgt paa Gehalt af Svovl og Jern, da Forsøget var foretaget for et andet Øiemeds Skyld, men ved to senere Bestemmelser af samme Slags Svovljern erholdtes i det ene Tilfælde 25.97 Procent Svovl og i det andet 26.85 Procent, altsaa i Middel 26.41 $\frac{1}{2}$  Procent. Heraf beregnes at i den samlede Masse af de 240 Gram Svovljern og 153 Gram Jern skulde have været 16.13 Procent Svovl. I den 112 Gram vægtige Klump, der var bleven tilbage i Digelen, fandtes Svovlgehalten i den nederste Del at være 2.41 Procent og i den øverste Del 12.29 Procent.

2. 42.2 Gram Svovljern af 25.97 Procent Svovlgehalt samt 42.2 Gram Jernfilspaan smeltedes i en vel luteret Grafitdigel. Digelen var afskaaret til omtrent  $\frac{1}{2}$  Tomme ovenover Indholdet, der bedækkedes med et Stykke Kul. Efter en Smeltning af 30' standsedes. Efter Afkjølingen befandtes Massen at indeholde flere forholdsvis større Blærerum der vare besatte med Jernkrystaller af samme Form som ved det første Forsøg. Nogen fulkommen Smeltning havde dog ikke fundet Sted men blot en stærk Sammensintring. Den sammensintrede Masse, der veiede omtrent 83 Gram, blev derfor i en ny Digel udsat for en 45' vedholdende Smeltehed. Nu var Indholdet i

---

<sup>1)</sup> I Midten af det øverste af denne var et Druserum besat med Krystaller af Jern, der vanskeligt kunde ses uden med Lupen. Hver Krystal bestod af et Skelet af en retvinklet noget spids Pyramide. Fra Pyramidens Hovedaxe som et Kontinuum stode fine Naale tæt ved Siden af hinanden i de Planer, man kan lægge igjennem Hovedaxen og de to øvrige Axer, saaledes, at Naalenes Spidser dannede Pyramidens Kanter. Set fra Spidsen af Pyramiden, dannede Komplexet af Krystalnaalene et retvinklet Kors. Tænker vi os en saadan Krystal indlemmet i en Sten, saa vil man ved at slibe Stenen lodret paa Krystallens Hovedaxe faa frem et retvinklet Kors af glindsende, lyst Metal, men lodret paa en af de andre Axer en Rad af glindsende Jernpartikler ordnede som en lige Rad af Perler.

Digelen efter Afkjølingen ganske befriet for alle Blærerum. Overfladen var tildels besat med samme Slags Jernkrystaller. Ved Slibning viste Jernet sig overalt at optræde som Krystaller, oventil som smaa glindsende Kors inde i Svovlmetallet, nedentil mere i Form af Fjær. Ved Analyse fandtes det øverste af Klumpen at indeholde 15.73 Procent Svovl, det nederste 9.56 Procent. Efter Beregning skulde den midlere Svovlgehalt være 12.985 Procent.

3. 130 Gram Svovljern med en Gehalt af 26.85 Procent Svovl og 62 Gram Jernfilspaan smeltedes 60' i en ligeledes vel luteret Grafitdigel, der var afskaaret paa samme Maade som ved Forsøg 2. Noget Kuldække undlodes. Man erholdt en sammenhængende Masse, der paa Grund af Blærerum ikke nøie havde sluttet til Digelens Vægge. Dens Vægt var 184 Gram. De Dele af Klumpen, der havde lagt i nøie Berørelse med Digelen vare metallisk glindsende og broncefarvede. Uagtet der var nogle Jernkrystaller paa Overfladen og disse viste sig tildels ogsaa i det Indre, saa kom jeg til det Resultat at nogen fuldstændig Smeltning ikke havde fundet Sted, og fandt det ikke rimeligt, at man ved en anden længere Ophedning skulde opnaa en fuldstændig Smeltning. Den beregnede gennemsnitlige Gehalt af Svovl er 18.18 Procent. Af det øverste Parti af Massen fandtes ved Analyse 20.4 Procent.

Disse Forsøg vise paa det tydeligste, at der skal en særdeles betydelig Temperatur til for at bringe en Blanding af metallisk Jern og enkelt Svovljern med en samlet Svovlgehalt af 16—18 Procent til at smelte. Thi af det tredie Forsøg ser man, at det ikke var muligt at overføre en saadan Blanding af Vægt ikke fuldt 200 Gram i fuldkommen flydende Tilstand i en Tid af 60', udsat for den høie Temperatur, som man kan frembringe i en Sefstrøms Ovn ved Hjælp af Koks. Heraf kan man med Sikkerhed slutte, at skulde en smeltet Masse af samme Sammensætning være forekommet paa Bunden af en



Kongsbergs Raaovns Herd, maatte den ufeilbarlig være delvis styrket, inden et Udstik fandt Sted. Rigtig nok viser det første Forsøg en hurtigere Smeltning. Dette kan jeg ikke forklare paa anden Maade end ved at antage at Varmen virkede mere umiddelbart derved, at Digelen gik itu. Tilsatsen af Glas har vel ogsaa i dette Tilfælde bevirket, om ikke en hurtigere Smeltning, dog en hurtigere Afsondring af de uligeartede Dele. Denne Tilsats maatte dog ved de følgende Smeltninger udelades af Frygt for, at Diglerne derved skulde formeget angribes. Af alle 3 Forsøg ser man at det øverste Parti af den smeltede eller sammensintrede Masse har en højere Gehalt af Svovl end det nederste.

	Svovlgehalt		Afstanden imellem Overfladen og Bunden.
	øverst.	nederst.	
No. 1	12.29	2.41	25.mm.
- 2	15.73	9.56	25.mm.
- 3	20.40	15.96	32.mm.

Svovlgehalten 15.96 Procent, No. 3, er beregnet af den midlere Svovlgehalt 18.18 og den fundne 20.40 af det øverste Parti efter Formelen

$$\frac{20.40 + x}{2} = 18.18$$

hvor  $x$  findes 15.97. Da Klumpen aftager i Gjennemsnit mod Bunden faar man derved en for høj Svovlgehalt.

Vi se saaledes, at den Antagelse, at alt det i Raastensstykket No. 32 indlemmede Jern oprindelig har været opløst i det Svovlmetal, der nu omgiver det i fast Form, ikke kan være holdbar. En anden Forklaring af den store Anhobning af Jern bliver derfor nødvendig og ligger aabenbart i Sagens Natur.

Efterat Stenen er kommen i Herden er den udsat for en fortsat Afkjøling. Denne tiltager i betydelig Grad under Stikningen af Stenen og efterat den er kommen i Stikdigelen.

Alt Jern, som ikke med Svovl kan danne enkelt Svovljern, vil, indtil Stenen er stivnet, efterhaanden udskille sig i metallisk Tilstand. Jo mere Jern, der har været opløst, jo rigere vil ogsaa en Udskilning finde Sted og jo lettere vil ogsaa Jernet samle sig til forholdsvis større Korn. I de nedere Partier af Stikdigelen, hvor den specifikke Vægt muligens har været større og hvor saaledes ogsaa mest Jern skulde have været opløst, vil ogsaa det udskilte Jern falde rigeligst. Samtidig med at Jernet begynder at udskille sig, begynder ogsaa dettes større specifikke Vægt end den omgivende flydende Masses at ytre sig. Jernpartiklerne synke efterhaanden dybere og dybere ned, og paa Veien ville flere og flere af dem fæste sig sammen. Nu er det klart, at jo nærmere den flydende Sten er Bunden, desto mere metallisk Jern vil der ogsaa ophobe sig i den. Dette bevirkes dels muligens ved en antagelig større Mængde Jern, som har været opløst i den, dels fornemmelig ved det fra de høiere liggende Partier udskilte, der ved Nedsynkning er tilkommet. Paa Bunden af Stikdigelen vil der samle sig et Bundfald af Jern ganske paa samme Maade, som der sker i et Bægerglas af Vædske, hvorfra der er blevet noget udfældet. Men da Afkjølingen foregaar hurtigt vil en stor Del af Jernpartiklerne ikke naa Bunden inden Massen er bleven stiv. Sandsynligt er det, at den voldsomme Bevægelse af den flydende Masse under Stikningen, der tillige maa være ledsaget af en stærk Afkjøling af Fluidet, indleder eller idetmindste paa-skynder Udskilningen. Jernpartiklerne vise sig desuden som meget smaa rundagtige Korn uden nogen synlig Krystallinitet, hvilket synes at bevise, at Udskilningen ikke er foregaaet i Ro. Det analyserede Haandstykke fra Bundstenen anser jeg for at være en Del af det stivnede Jernbundfald. I det har der ikke været opløst saameget Metal, som Analysen deraf angiver, men en stor Del deraf er kommen fra høiere liggende Skikter i Stikdigelen, imedens Stenen endnu var flydende. Hvormeget der er tilkommet er der ikke muligt at afgjøre.

Imedens denne Sten efter Beregning indeholder imellem 77 til 95 Dele metallisk Jern paa 100 Dele Svovlmetal og Slag, indeholder Stenen fra en af de øvre Skiver kun 12 Dele metallisk Jern paa 100 Svovljern og Slag. Efter en paa Kongsberg anstillet Analyse (Kerls Metallurgi, Bind IV, Side 71) indeholdt Raastenen for 1859, gjennemsnitlig paa 100 Dele Svovlmetal og Slag 16 Dele metallisk Jern. Kan man anse denne Analyse for at repræsentere Raastenens Gjennemsnitsgehalt, skulde en betydelig Mængde Jern kunne samle sig paa Bunden af Stikdigelen.

Da efter min Opfatning det fri Jerns Forekomst i Stenen hidrører fra en Udsondring af dette Metal ved Afkøling, efterat det i en høiere Temperatur har været opløst, saa er det en Selvfølge, at denne Udsondring ogsaa kan finde Sted i selve Ovnens Herd, naar Temperaturen er lav nok. Sandsynligt er det, at en Udskilning af Metal i ringere Grad endogsaa sker temmelig hyppig, og at den i de sædvanligste Tilfælde allerede har begyndt, inden et Udstik finder Sted, naar man forudsætter, at Trækul anvendes som Brændsel. Er Udskilningen foregaaet i den Grad, at et virkelig Jernbundfald har kunnet faa Tid til at danne sig, saa vil dette give Anledning til Dannelsen af Jernsugger, da dette Bundfald paa Grund af Mangel paa Flydenhed ikke vil kunne løbe ud af Herden, men der blive liggende tilbage. Da jeg før var hildet af den Tro, at Undersulfureter af Jern eksisterede og ikke havde set og undersøgt det mig af Hyttimester Samuelson senere overladte Stykke af en Jernsugge, fandt jeg det ikke sandsynligt, at en saadan kunde danne sig ved Udfældning af Jern. Jeg har ogsaa derom yttret Tvivl i min før citerede Afhandling i Polyteknisk Tidsskrift, men er nu som man ser af en anden Mening. Disse i Herdens Bund afsatte og hovedsagelig af Jern bestaaende Konkretioner have en eiendommelig Struktur. Jeg har havt Anledning til at se flere Sommeren 1873 baade fra Raasmeltingen i Kongsbergs Smeltehytte og fra Raasmeltingen

og Concentrationssmeltningen i Ringerigets Nikkelværks Hytte og alle teede de sig paa samme Maade. De danne ofte betydelige Masser og den Del, hvorpaa den flydende Sten har hvilet, er noget fordybet. Det skaalformige Parti er almindelig begrændset af flere Protuberanser. Det er hovedsagelig disse sidste, der vise en mere eller mindre traadig og, hvad der er det mærkelige, med Vertikalen parallel Textur. Protuberansernes Traadighed er ikke lige karakteristisk hos de forskellige Jernsugger og hos en og samme er den mest fremherskende i Toppen af Protuberanserne, mindre i Roden. Bruddet i den øvrige Masse er finkornigt, saavidt min Erfaring strækker sig. Fint slebet ser man ingen homogen Masse men fine Metalkorn omgivet med endnu mindre mørke og ikke glindsende Svovlmetaldele. Jeg er i Besiddelse af et Stykke af en Jernsugge fra Falun falden fra Sulusmeltningen (Skjærstenssmeltningen), der viser en ligesaa udmærket traadig Textur som det fra Kongsberg analyserte. Der er indlemmet i den nogle gjennemsigtige glasagtige Slagklumper af en vingul Farve. Jernet i den er overordentligt seigt og vægt. Desuagtet viser et Brud lodret paa Traadenes Retning tydelige speilblanke Gjennemgangsflader. Hvis det skulde vise sig, at denne Vertikalitet i Texturen er konstant saaledes som det er Tilfældet paa Kongsberg, saa synes følgende Forklaring af Fænomenet ikke at være usandsynlig. Danner saaledes som før er vist det udfældte Jern, der er bleven tilbage i Herden, den første Oprindelse til Jernsuggen, saa vil den danne en svampagtig Masse. Eftersom Herden paany fyldes med Sten vil det i det tilbageblevne Jernbundfald indeholdte Svovljern atter antage sin flydende Form, om det skulde have styrknet, eller i alle Fald blive mere flydende. Jernet som det specifisk tungere i det svampagtige Residuum vil bestræbe sig for at synke tilbunds, men dette kan ikke ske, uden at en tilsvarende Volummængde Svovljern fordrives. I et Fluidum er Trykket i samme Niveau uforandret, imedens det bliver mindre og mindre, efter-

som Dybden under Overfladen formindskes. Det er derfor klart, at det af Jernet fordrevne Svovljern søger did hvor Trykket er mindst, det vil sige lodret op. Efterhaanden vil der derved danne sig tilnærmelsesvis vertikale Kanaler, hvorigjennem Svovlmetallet stiger op, medens paa den anden Side flere og flere Jernkorn vil sveidse sammen. I den øverste Del af Massen er Heden størst og Kommunikationen lettere. Alt det Svovlmetal som er nedenunder maa for at komme løs passere den øverste Del. Det er derfor i Overensstemmelse med Observationerne, at den øverste Del af Udværterne har den traadige Del mere udviklet end den nederste Del.

Den beregnede samlede Svovlmængde i den analyserte Jernsugge var 10.92 Procent, i No. 32 Raasten blev funden 17.35 Procent. Udelader man Slaggen af begge Analyser, reducerer Analyseernes Sum til 100 og anser baade Raastenen og Suggen at bestaa blot af Svovl og Jern, bliver Sammensætningen denne:

	Raastenen.	Jernsuggen.
Svovl .	18.15	11.30
Jern .	81.85	88.70
	<hr/> 100.00	<hr/> 100.00

Beregner man, hvormeget enkelt Svovljern Raastenen maa give Slip paa, for at faa en Svovlgehalt af 11.3 Procent, saa erholdes, naar Svovlets Mængde i den afgivne Del Svovljern kaldes  $x$  og lægger Mærke til at der for hver Del Svovl samtidig tillige gaar  $\frac{1}{4}$  Del Jern væk, følgende Ligning

$$\frac{18.15 - x}{100 - \frac{1}{4}x} = \frac{11.30}{100.00}$$

hvoraf  $x$  findes lig 9.967 og  $x + \frac{1}{4}x = 27.409$ . Raastenen maa saaledes afgive lidt over Halvparten af sit Svovljern for at faa samme Sammensætning som Jernsuggen.

En Dannelse af Jernsugger ved Udfældning af metallisk Jern (Nikkel) af en paa Jern (Nikkel) overmættet Sten, foregaar i Regelen mest ved den egentlige Raasmeltning, hvor man ved Tilsætning af Svovlkis ansamler fattige sølvholdige Sligers Sølvgehalt i en Sten, men finder tildels ogsaa Sted der, hvor røstede svovlede Ertse og Hytteprodukter forsmeltes, som ved Skjærstens- og Concentrationssmeltningen ved Ringerigets Nikkelværks Hytte og Sulusmeltningen ved Falun. Beskikningens Beskaffenhed har naturligvis megen Indflydelse. Undertiden bestaar Bunden af en udblæst Ovn kun af stivnede stenagtige (ikke svovlmetalholdige) Slagger som ved Skjærstenssmeltningen ved Røros.

---

Metallisk Kobber findes almindeligt i al Slags Kobbersten, enten man maa henregne den iblandt de fattigere eller mere rige. Aldrig har jeg dog i dette Hytteprodukt truffet Kobberet i Krystaller eller med Antydning til Krystaller. Efter mine Iagttagelser forekommer det dels paa det Udvendige af den styrknede Stenskive — saaledes som den er, naar den er taget op af Stikken og endnu har sine naturlige Styrkningsflader — som ganske smaa Vorter eller som korte Tagger; dels i det Indre af den i Blærerum som finere Traade eller Haar, der ofte staa tæt ved Siden af hinanden — Kobberuld —; dels ogsaa som meget smaa, uregelmæssige Dele midt ind i Stenmassen. Percy anfører i sin Metallurgi, at man iagttager Mosekobberet fortrinsvis og af den fineste Beskaffenhed ved Pimple-metal, hvor alle Hulninger ere fyldte dermed og Traadene gaar fra Støbestykkerne ned i Formsanden; endvidere at Støbestykkerne fra Smelteovnene for calcinerede Ertse ere paa deres Overflade saa tæt besatte med mørkt farvet Mosekobber som Traadene paa Fløiel. Flere af disse Kobberets Forekomstmåder vise tydeligt, at det har været i en bevægelig, for ikke at sige flydende Tilstand, efterat Stenen har været styrknat

eller mestendels styrknet, hvilket Faktum jeg vil fremhæve, da man ikke synes tilstrækkeligt at have paaagtet det. Naar der paa Undersiden af en Stenskive stikker frem fritstaaende, for alt Andet blottede Kobbertagger, maa disse have dannet sig, efterat Stenskiven er lettet op fra den nedenunder liggende flydende Sten. Endvidere naar Kobberet sidder som Vorter eller korte Tagger paa Oversiden af Stenskiven eller viser sig som Fløielstraade paa Overfladen af Støbestykker (Percy), tyder det hen paa, at der idetmindste maa have dannet sig en Skorpe paa den flydende Sten; og naar det forekommer i Blærerum, maa disse idetmindste tildels have været forhaanden, da Kobberet kom frem, thi ellers kunde ikke dets Traade rage frit ind i Hulhederne.

Plattner anfører i sine «Vorlesungen über allgemeine Hüttenkunde» Bind 2. S. 167. «Er Kobberstenen mærkelig blyholdig, vise de udpressede Metaldele sig ikke kobberrøde, men lys blygraae og bestaa af blyholdigt Kobber; og indeholder Kobberstenen Sølv, er det udskilte Kobber ikke frit for Sølv. Ved sølvrige Kobberstene iagttager man forøvrigt en ganske lignende Foreteelse med Sølv. Det sidste viser sig ligeledes traadformig udskilt i smaa Blærerum.» Opheder man Svovlsølv i en Strøm af Vandgas eller Vandstofgas antager det herved reducirte Sølv ligeledes Traadformen.

Heraf ser man, at ikke alene Kobber, men ogsaa blyholdigt Kobber, sølvholdigt Kobber, kobberholdigt Sølv og Sølv kan antage lignende Former som Kobberet. Det er derfor i høj Grad sandsynligt, at hvad der har bevirket Kobberets Traadform, ogsaa har hidført den hos de andre metalliske Sammensætninger og Sølv. En Forklaring af Fænomenet maa derfor være af den Beskaffenhed, at den kan passe paa de nævnte samtlige Metaller og Metallegeringer, hvordan end Reduktionen er foregaaet. Idet jeg her vil forsøge at fremsætte en saadan Forklaring, haaber jeg — hvis jeg ei skulde være saa heldig at træffe den rette, som fremtidige Undersøgelser maa afgjøre —

dog idetmindste at levere nogle Fakta, som kunne bidrage til Fænomenets Belysning.

Ved at se denne Haar- og Traadform, som Kobberet har antaget i Blæserummene, maa den Tanke uvilkaarlig paatrænge sig En, at en vis Kraft har presset Kobberet ud af Stenen samtidig med, at den blev fast. Denne Mening deles af Flere navnlig af Plattner og Percy. Allerede Betegnelsesmaaden Haarform, Traadform, Kobberuld, Mosekobber giver tilkjende at Kobberet ikke har en langstrakt retlinet Form som en Naal, men en mere eller mindre bøiet. Ja man træffer endog paa Traade, som formelig ere dreiede eller tvundne, (Percy, ogsaa iagttaget af mig i nogen Grad). En Traads Gjennemsnit kan med Hensyn til Formen være meget forskjellig, dog tror jeg det almindeligst nærmer sig til en Cirkel med en Del Indskjæringer, thi langs paa Traadens Overflade gaar der smaa Furer. Gjennemsnittet er, saavidt jeg har iagttaget bestandig større ved Roden af Traaden end ved Toppen, og Traaden vil, naar den tænkes retlinet udstrakt, tilnærmelsesvis antage Formen af en ret afkortet Kegle, da Tykkelsen aftager fra Roden til Toppen tilsyneladende ensformig. Ikke sjelden ser det ud, som om flere Traade ere skudte frem umiddelbart ved Siden af hinanden dels sammenhængende dels ikke.

For at man kan have Tal at holde sig til, har jeg foretaget Maalinger af Tykkelsen af nogle Kobbertraade, tagne iflæng af No. 16, Trotsten fra Falun, med et det physiske Kabinet tilhørende Instrument af Gambey i Paris, hvorved man aflæser med Sikkerhed 0.01 af et Millimeter. Herved erholdtes følgende Resultat, naar  $d$  betyder Tværmaalet af Toppen af Traaden og  $D$  af Roden. Da Traadene ikke saa sjelden pleie at have en Opsvulming umiddelbart ved Roden, saa ere de maalte Traade fraskilte den Del. Maalene ere angivne i Millimeter. Traaden blev for hver særskilt Maaling dreiet noget om sin Axe.



No. 1.		No. 3.		No. 5.		No. 7.	
d	D	d	D	d	D	d	D
0.05	0.18	0.035	0.13	0.03	0.155	0.11	0.24
0.03	0.21	0.09	0.13	0.08	0.19	0.11	0.215
0.03	0.195	0.07	0.115	0.07	0.19	0.08	0.20
Middel 0.037	0.195	0.095	0.125	Middel 0.06	0.178	Middel 0.10	0.218
		Middel 0.0725	0.125				
No. 2.		No. 4.		No. 6.			
d	D	d	D	d	D		
0.08	0.14	0.025	0.195	0.04	0.13		
0.09	0.13	0.065	0.135	0.04	0.12		
0.06	0.10	0.02	0.105	0.025	0.125		
Middel 0.077	0.123	Middel 0.0367	0.145	Middel 0.035	0.125		

Endvidere vil jeg i følgende Tabel ledsage Middeltallet af disse Maalinger med andre Størrelser, som det er af Interesse at kjende. Saaledes L, Traadens Længde i Millimeter, V, deres Vægt i Milligram, K, deres Kubikindhold i Kubikmillimeter beregnet efter Formelen for den afkortede Kegel  $\frac{1}{12} \pi L (D^2 + Dd + d^2)$  og k efter Udtrykket V divideret med 8.95 — Kobberets specifikke Vægt —; G Diameteren af den Kugle, som har et Kubikindhold lig  $\frac{K+k}{2}$  og endelig M Keglens generende Vinkel angivet i Minuter.

Treadness Number.	d	D	L	V	K	k	$\frac{K+k}{2}$	G	2M
1	0.037	0.195	28.5	2.3	0.3478	0.2570	0.3024	0.833	38.1
2	0.077	0.123	24.3	2.63	0.1942	0.2930	0.2441	0.775	13.0
3	0.0725	0.125	23.3	2.2	0.1827	0.2458	0.2143	0.742	15.5
4	0.0367	0.145	20.0	1.4	0.1450	0.1564	0.1507	0.660	37.2
5	0.060	0.178	19.8	1.7	0.2383	0.1899	0.2141	0.742	41.0
6	0.035	0.125	21.5	0.85	0.1195	0.0945	0.1070	0.589	28.8
7	0.100	0.218	17.9	2.65	0.3718	0.2961	0.3340	0.861	45.3
Sum	0.4182	1.109		13.73	1.5993	1.5336			

Man ser af Kolonnerne d og D, at D, Tykkelsen ved Roden, ikke er ubetydelig større end d, Tykkelsen ved Toppen. I Middeltal af alle 7 Traade er D mere end  $2\frac{1}{2}$  Gange saa tyk som d. Den tydeligste Forestilling om Formen faar man dog af sidste Rubrik 2M der angiver det dobbelte af Keglens generende Vinkel. Hos de maalte 7 Traade ligger den omtrent

imellem Grændserne  $\frac{1}{4}$  og  $\frac{3}{4}$  Grad. Summen af Kubikindholdet af alle 7 Traade tilsammen findes, naar man anser dem som ret afkortede Kegler, at være 1.5993. Men beregner man Kubikindholdet ved Hjælp af Traadenes absolute Vægt 13.73 mgr. og Kobberets specifikke Vægt 8.95 erholdes 1.534. Paa Grund af Beregningsmaaden er det sandsynligt at K er blevet noget for stor. Paa den anden Side stiller det sig noget tvivlsomt, om man kan tillægge Kobberet i Traadene en saa stor specifik Vægt som 8.95, der er anvendt for at beregne k. En mindre Egenvægt giver naturligt et større Kubikindhold. Af 1.5993 divideret med 13.73 findes 8.585 som Kobberets specifikke Vægt istedetfor 8.95. Det vilde for det Følgende Skyld være interessant at vide, hvor stor Kobberets Egenvægt er i Mosekobberet, men til at bestemme den har der manglet mig den tilstrækkelige Qvantitet. Rubrikken G er tilføjet for paa en tydelig Maade at vise, hvor ringe den Kobbermængde er som danner Materialet til Traadene.

En ottende Traad havde en Længde af 33 Millimeter og veiede 5.6 mgr. Den var hovedsagelig en dobbelt Traad og dannede tilsyneladende et Hele indtil omtrent 5 mm. fra Toppen, hvor de to enkelte Traade viste sig adskilte, efterat de først vare snoede  $180^{\circ}$  om hinanden. Ved at løsne Sammentvindingen kunde de dog ved Anvendelse af nogen Kraft videre skilles ifra hinanden til nogle Millimeter fra Roden, hvor den ene Traad gik af.

Paa Toppen af enkelte Traade har jeg iagttaget i Længde af nogle Tiendedele af et Millimeter eller mindre et mørkt farvet Overdrag, der tydeligt forøgede Tykkelsen og med Lethed sprang af. Formodentlig en lille Smule Svovlmetal.

De foran anførte Observationer vedkommende Kobberulden synes ikke at tale for, at den har kunnet voxe frem paa Grund af krystallinske Kræfter. Især vil jeg fremhæve Traadenes medfødte, uregelmæssig bøjede Beskaffenhed, samt Gjennemsnittet hos en og samme Traad baade med Hensyn

til Størrelse — tykkere ved Roden og smalere ved Toppen — som ogsaa med Hensyn til Form, hvilket sidste de enkeltvis udførte Maalinger synes at antyde. Man bestyrkes end mere i en saadan Mening, naar man har for Øie, at ikke alene Kobber, men ogsaa blyholdigt Kobber optræder i Blærerum paa samme Maade. Vel krystalliserer Bly og Kobber i det regulære System, men i kemisk Henseende ere begge Metaller temmelig forskjellige. Tillige ere deres Smeltepunkter betydeligt fjernede fra hinanden. En Legering af begge Metaller er saa lidet homogen, at man ved simpel Smeltning ved passende valgte Temperaturer efterhaanden kan skille dem fra hinanden. Naar efter Plattners Iagttagelse det blyholdige Kobber, der havde antaget Traadformen, besad en lys blygraa Farve, synes Blygehalten heller ikke at have været saa ganske ringe. Hvis saaledes det blyholdige Kobbers Traadform var bevirket ved Krystallisation, da maatte Bly og Kobber være isomorfe, men herom kan formentlig ikke være Tale. Vi drage heraf omvendt den Slutning, at det blyholdige Kobbers Optræden i Blærerum i Stenen ikke hidrører fra et Krystallisationsfænomen og at paa Grund af Analogi heller ikke Sølvets og Kobberets er at henhøre til samme Fænomen. Det sandsynligste er derfor at Kobberets o. s. v. Haar- eller Traadform ikke er at tilskrive krystalliniske Kræfter.

Imedens Jernet, som vi har bemærket, høist sandsynligt udskiller sig af den endnu smeltede Sten, saa er, som før paavist, dette ikke Tilfældet med Kobberet. Saaledes træffer man ikke dette Metal som Krystaller, hværken fuldkomne eller ufuldkomne. Det udskilte Jern er paa alle Kanter næie omgivet af den tætte Stenmasse; Kobberet derimod vel at mærke optræder almindeligt inde i Stenen ledsaget af en Hulhed (Blærerum). Dette gjælder ogsaa, om de udskilte Kobberpartikler ere nok saa smaa. En Undtagelse fra denne Regel har jeg truffet hos et Par stærkt kobberholdige Stene: nemlig

No. 16 Trotsten fra Falun og No. 9 hvidt Metal fra Kaafjorden. I disse to fandtes Kobberkorn uden ledsagende Hulhed, i den første i Nærheden af et stort Blærerum eller en Yderflade besat med større Kobbertraade, i den sidste, der manglede Blærerum, men havde Kobber udskilt paa den naturlige Styrkningsflade, noget inde i Stenen. Da man ved Slibning blot kan observere Udseendet af en eneste Gjennemsnit, saa er det muligt, at en Hulhed alligevel kan have været tilstede. — Hvis Kobberet ogsaa skulde kunne udskille sig, imedens Stenen endnu var flydende, saa maatte man paa Grund af Kobberets store specifikke Vægt ogsaa træffe det ved de Smeltninger, der ikke have til Hensigt at fremstille Kobberet i metallisk Tilstand, enten samlet paa Bunden af Herden eller, hvis Stenen havde været af de fattigere, fordelt i denne som større Korn eller Gryn. Dette gjør man, som Erfaringen viser, ikke. Udskilningen synes derfor at foregaa enten samtidig med Stenens Styrkning eller umiddelbart efter.

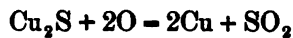
Er Tiden med Hensyn til Kobberets Fremkomst bestemt, bliver det næste Spørgsmaal at afgjøre, ved hvilken kemisk Aktion det er bleven reduceret. Man kan tænke sig to Muligheder. Enten er Kobberet reduceret samtidig med Beskikningens Formeltning, senere opløst i Stenen og derpaa udskilt ved dennes Styrkning, eller Reduktionen og Udskilningen er foregaaet under Styrkningen af Stenen. Den første Antagelse har megen liden Sandsynlighed for sig. Thi man kan ikke godt antage, at Kobberet med sin store Affinitet til Svovl skulde, naar ikke en særdeles Mængde frit Jern er forhaanden (Berthiers og Fournets Forsøg), kunne existere i en smeltet Sten uden i kemisk Forbindelse med Svovlet. Skulde det udskille sig saa maatte det være samtidig med Jernet og legeret med dette, som ogsaa Analyserne synes at pege hen paa, og ikke senere. Den anden Antagelse, at Reduktionen er foregaaet under Styrkningen, bliver derfor den ene sandsynlige og det

Agens, som har medvirket dertil, maa man søge i Luftens Surstof.

Vi ved at Svovlmetaller og Oxyder kunne virke reducerende paa hinanden, Svovlkobber og Kobberoxydul efter Formelen:



Maaske kan Svovlkobber ogsaa mere direkte reduceres ved Surstof nemlig saaledes:



Altsaa hvis Stenen kan paavirkes af Surstof, vil metallisk Kobber kunne fremkomme. I Ovnens Herd (fornehmelig Skaktovne), hvor den befinder sig dækket af Slag, vil den være godt beskyttet mod Luftens Indvirkning. Anderledes er Forholdet under og efter Udstikningen, da vil Luften kunne komme til i ikke ubetydelig Grad. Det er dog sandsynligt, at saalænge Stenen besidder en høi Temperatur og som Følge deraf stor Flydenhed, vil det Kobber, som kunde have reduceret sig, paa Grund af den større Cirkulation, der finder Sted i Stenens fluide Masse, og paa Grund af Kobberets store Affinitet til Svovlet atter forbinde sig med dette til Halvtsvovlkobber. Det bliver saaledes først under Stenens Styrkning eller naar den har opnaaet en deigagtig Consistens, at man kan vente at den atmosfæriske Lufts reducerende Indflydelse vil efterlade et synligt Resultat. Jeg har gjort opmærksom paa, at selv de paa Kobber forholdsvis fattigere Kobberstene ogsaa vise dette Metal udskilt, om ogsaa Traadene ere af høist ubetydelige Dimensioner. At dette kan ske staar rimeligvis i Forbindelse med en foregaaende Udsondring af meget rig Kobbersten (Halvtsvovlkobber?). Det er nemlig før bemærket, at man paa slebne Flader af ikke meget rig Sten kan iagttage mørkere og lysere Partier, der antagelig ogsaa giver tilkjende mere og mindre kobberrige.

Svovlkobberet og Kobberoxydulet, som under almindelig Temperatur ere faste Legemer, have vel under deres gjensidige Reduktion ikke fuldstændig antaget den faste Form. De levere hver sin Del til Svovlsyrlingens Sammensætning. Da denne sidste Forbindelse er en Gasart, maa den besidde ved sin Tilblivelse en stor Spændkraft, da dens Bestanddele ere forhaanden i en tættere Aggregationsform. Tilnærmelsesvis kan den Volumforegelse, der finder Sted med Svovlsyrlingen fra Øieblikket af dens Dannelse og indtil den frit kan udvide sig, beregnes paa følgende Maade.

Halvtsvovlkobbers specifikke Vægt er 5.98

Kobberoxydulets — — 5.75

Den indbyrdes Reduktion af disse to Forbindelser foregaar som før bemærket efter Formelen



Antager man, at deres samlede Vægt i et saadant Forhold udgjør et Gram, har man af

	Gram.	Gram.	Gram.
Svovlkobber	0.3573	= 0.2853 Cu	og 0.0720 S og af
Kobberoxydul	0.6427	= 0.5707 Cu	og 0.0720 O
Sum	1.0000	= 0.8560 Cu	og 0.1440 SO <sub>2</sub>

Er  $p_1, p_2, p_3 \dots$  de absolute Vægter af Legemerne  $A_1, A_2, A_3 \dots$  angivet i Grammer, og  $s_1, s_2, s_3 \dots$  deres specifikke Vægter, saa findes disse samlede Legemers specifikke Vægt,  $S$ , efter Formelen

$$\frac{p_1}{s_1} + \frac{p_2}{s_2} + \frac{p_3}{s_3} + \dots = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \dots}{S}$$

Den specifikke Vægt af Svovlkobber og Kobberoxydul tilsammen i denne Kombination findes saaledes lig 5.83. 1 Gram Vand har et Rumindhold af 1 C.C. (Kubikcentimeter). 0.3573

$\text{Cu}_2\text{S}$  og  $0.6427 \text{ Cu}_2\text{O}$  har tilsammen et Rumindhold lig  $\frac{1}{5.83}$   
 =  $0.1715 \text{ C.C.}$

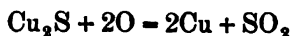
1000 C.C. Luft, befriet for Vand og Kulsyre, veier ved  $0^\circ \text{ C.}$  og  $28'' \text{ B.}$   $1.299 \text{ Gr.}$  Svovlsyrlings specifikke Vægt er  $2.247$ ; altsaa veier 1000 C.C. Svovlsyrning  $2.919 \text{ Gr.}$   $0.144 \text{ Gr.}$

$\text{SO}_2$  indtager et Rum, der ved  $0^\circ \text{ C.}$  og  $28'' \text{ B.}$  er  $= \frac{0.144}{2.910} \cdot 1000 \text{ C.C.}$   
 =  $49.3 \text{ C.C.}$  og ved  $1000^\circ \text{ C.}$  og  $28'' \text{ B.}$  lig  $229.77 \text{ C.C.}$ , naar man af Formelen  $V_t = V_0 (1 + 0.00366 \cdot t)$ , hvor  $V_t$  er en Gas-orts Volum ved  $t^\circ \text{ C.}$  og  $V_0$  ved  $0^\circ$ , beregner  $V_t$ .

I det antagne  $1 \text{ Gram Cu}_2\text{S} + 2\text{Cu}_2\text{O}$  er den hele Kobbermængde lig  $0.856 \text{ Gr.}$  Kobberets specifikke Vægt er  $8.95$ .  $1 \text{ Gram Kobber}$  har et Volum lig  $\frac{1}{8.95} \text{ C.C.}$  altsaa  $0.856 \text{ Gr.}$ , et Volum, der er  $0.856 \cdot \frac{1}{8.95} = 0.0956 \text{ C.C.}$

I Tilblivelsesøjeblikket indtager Kobberet og Svovlsyrningen tilsammen et Rum lig  $0.1715 \text{ C.C.}$  Deraf falder  $0.0956 \text{ C.C.}$  paa Kobberets Del, følgelig bliver saaledes tilbage for Svovlsyrningen  $0.0759 \text{ C.C.}$  Divideres dette sidste Tal i  $49.3 \text{ C.C.}$  og  $229.7 \text{ C.C.}$ , de Volumina, Svovlsyrningen har ved  $0^\circ$  og  $1000^\circ$ , findes  $650$  og  $3026$ . Med andre Ord: Svovlsyrningen er i Dannelsesmomentet sammentrykket til et Volum, der omtrent kun er  $\frac{1}{3000}$  af det, den vilde indtage under Reduktionen, der antagelig vel foregaar tilnærmelsesvis under en Temperatur af  $1000^\circ \text{ C.}$

Fremkommer Kobberet mere direkte af Svovlkobber, uden at Kobberoxydul benyttes som Mellemed, nemlig efter Formelen:

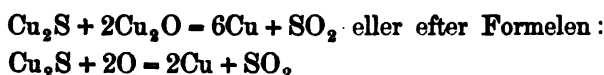


kan Svovlsyrningens omtrentlige Volumforøgelse saaledes findes.



1 Gram Halvtsvovlkobber indeholder 0.798 Kobber og 0.202 Svovl; dets Rumindhold er  $\frac{1}{5.98} = 0.167$  C.C. Af 0.202 Gr. Svovl dannes 0.404 Gr. Svovlsyrning, der ved 0° C. og 28" B. indtager et Rum lig  $\frac{0.404}{2.919} 1000$  C.C. = 138.4 C.C. og ved 1000° C. og 28" B. lig 624.9. Kobberets Rumindhold i Tilblivelsesøjeblikket er  $\frac{0.798}{8.95} = 0.0892$  C.C. og da Svovlkobberets Rumindhold = 0.167 C.C. bliver der igjen for Svovlet og tilnærmet for Svovlsyrningen 0.0778. Antagelig bliver Svovlsyrningens Rumindhold noget større, da det Svovlkobber, som reduceres, iforveien ved at absorbere Surstof sandsynligt har tiltaget i Volum. Tages intet Hensyn til denne Svovlkobberets Volumforandring, findes, at Svovlsyrningen ved sin Fremkomst er komprimeret til omtrent  $\frac{1}{8000}$  af det Volum, det vilde antage under Reduktionstemperaturen ved 28" Barometertryk.

Man ser saaledes, at Svovlsyrningen ved sin Frigjærelse, enten den sker efter Formelen:



besidder en ganske anseelig Spændkraft. Antager man nu, at  $\text{Cu}_2\text{S} + 2\text{Cu}_2\text{O}$  eller  $\text{Cu}_2\text{S}$  imbibere med 2O er involveret i Stenen i Nærheden af dens Begrænsning, enten denne er fremkaldt ved Blærerum eller den ydre Luft, og udsat for en til Dekompositionen passende Temperatur, da vil antagelig en Foreteelse som den omspurgte kunne gaa for sig. Eftersom Kobberet reducerer sig, udvikler der sig samtidig Svovlsyrning, der presser baade sig selv og Kobberet ud igjennem en Aabning, som den enten selv fremtvinger sig eller som tildels har været forhaanden. Intet er rimeligere, end at denne Aabning i Stenen vider sig mere og mere ud.

Paafaldende er det, at Reduktionen maa foregaa ved en Temperatur, der er under Kobberets Smeltepunkt.

Efter Plattner smelter Kobber ved 1173° C.

Raasten - 1047° -

Kobbersten - 1002° -

Uden at kjende bestemt den Temperaturgrad, under hvilken Halvtsvovlkobberet smelter, kan man dog med Sikkerhed paastaa, at den ligger under den, der er anført for Plattners Kobbersten. Heraf følger, da Kobbersten ved at blive meget fattig nærmer sig til Raasten og ved at blive meget rig til Halvtsvovlkobber, at al Slags Kobbersten har et lavere Smeltepunkt en Kobberet. Dog man maa lægge Mærke til en Omstændighed, som synes at maatte forklare det Eiendommelige ved Kobberpartiklernes Bevægelighed under den lavere Temperatur. Hvor hurtigt end de kemiske Aktioner foregaa, behøve de dog en vis Tid. Det forekommer mig derfor sandsynligt, at Kobberet og Svovlsyringen umiddelbart efter Reduktionen, men inden de have skilt sig ifra hinanden, ville indtage en Slags Mellemtilstand — der dog kun vil være kortvarig — og derunder antage den fluide Form, især naar Temperaturen ikke er meget under Kobberets Smeltepunkt. Af det Rum, der fyldes af  $\text{Cu}_2 + 2\text{Cu}_2\text{O}$  eller  $6\text{Cu} + \text{SO}_2$ , indtager Kobberet de 56 Hundrededele, imedens det molekulvis er fordelt over det hele Rum. I denne fordelte Tilstand presses Kobberet ud, og vil først blive sammenhængende, naar Svovlsyringen under Udpresningen kan fare væk. Maaske vil Kobberets Molekuler, idet de samle sig til metallisk Kobber give Slip paa Varme; ganske vist vil den komprimerte Svovlsyring, idet den bliver fri, optage Varme, hvilket vil forhindre, at Kobberet muligens kunde smelte.

Som før omtalt antager ogsaa Sølv, naar det ved Hjælp af Vandgas eller Vandstofgas reduceres af Svovlselv, Traadformen. Benyttes Vandstofgas, forklares Processen efter Formelen:



Vandstoffet træder i Sølvets Sted, og, da HS som Gasart føres

væk, bliver Sølv et ene tilbage. Der er en Omstændighed ved Svovlsølvets Reduktion saavel ved Vandstofgas som ogsaa ved Vandgas, der skaffer et Indblik i, hvorledes den kemiske Proces gaar for sig. Det reducerede Sølv ydre Form er afhængig af Svovlsølvets Fremstillingsmaade. Som Bevis for denne Paa-stand tjene følgende Forsøg.

1. Tørt pulverformigt Svovlsølv, erholdt ved at bundfælde en fortyndet Opløsning af salpetersurt Sølvoxyd med Svovlvandstof, blev i et Kuglerør under Glødhede reduceret ved Hjælp af Vandstofgas. Det dannede Sølv havde, saalænge det laa i Glaskuglen, Udseendet af mat, pulverformigt Sølv. Ved at tage det ud af Kuglen og næiere at betragte det med Lupen, iagttog man en svampagtig Væv af krogede, meget tynde Sølvtraade. Bedst kunde Sølv et i sin Form sammenlignes med en Hob Krølhaar i meget formindsket Maalestok.

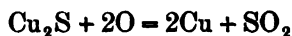
2. Svovlsølv — vundet paa den tørre Vei direkte af Bestanddelene og Produktet smeltet — i Stykker af nogle Tiendedele af en Kubiklinie til nogle Kubiklinier behandlet som No. 1 gav et mat Sølv, der havde samme Form som Stykkerne. Ved Lupens Hjælp kunde ingen Traade eller Tagge iagttages. Dog var Overfladen ikke ganske jevn, men glindsede omtrent paa samme Maade som Øiet af et Insekt, set igjennem et Førstørrelsesglas. Reduktionen gik langsomt for sig. Heden var saa stor, at de Stykker, der laa nærmest Glaskuglen, vare smeltede sammen.

3. Filspaan af samme Slags Svovlsølv som No. 2 blev delvis reduceret. Om nogen Formforandring var foregaaet med Filspaanerne, kunde ikke afgjøres, tilsyneladende ikke.

4. og 5. Reduktionen ved Hjælp af Vandgas gik i det Hele taget meget sent for sig. Sølvtraadene, fremkomne af det paa vaad Vei dannede pulverformige Svovlsølv, var maaske noget større end de, man erholdt ved Vandstofgas. Uagtet jeg ved Reduktionen af det Svovlsølv, der havde været smeltet, holdt paa omtrent  $\frac{1}{4}$  Time, vare dog blot de øverste Hjørner

af Svovlsølvstykkerne forvandlede til Sølv. Maaske der paa disse Hjerner vare nogle yderst korte Traade af Sølv.

Disse Forsøg forekomme mig at være af megen Interesse med Hensyn til Forklaringen af det omhandlede Fænomen. Man erfarer nemlig, at ved Benyttelsen af det porøse, paa vaad Vei vundne Svovlsølv kan Sølvets Traadform fremkaldes, ved Benyttelsen af forhen smeltet, tæt Svovlsølv derimod ikke eller kun antydningvis. Det synes derfor, at Forskjellen i Resultatet er at søge i den porøse og tætte Beskaffenhed af Materialet. Porøse Legemer kunne indsuge Gasarter. Det ligger saaledes nær at antage, at Vandstofgassen indsuges af det porøse Svovlsølv, og naar et Parti af dette har optaget saameget af Gasen, at Svovlet dermed fuldstændig kan forbinde sig, vil Dekompositionen foregaa. Man maa antage, at, umiddelbart efterat denne er fuldført, vil Sølvet og SH en ganske kort Tid være molekulvis fordelte ved Siden af hinanden antagende en fluid Tilstand, hvorpaa begge paa Grund af Svovlvandstoffets Spændkraft baner sig en Vei efter den mindste Modstandalinie, idet Sølvet derved antager Haarformen. Ifølge Analogi anser jeg det ikke for usandsynligt, at Surstofgasen ved Svovlkobberets Reduktion spiller omtrent en lignende Rolle som Vandstofgasen ved Svovlsølvets, nemlig at  $\text{Cu}_2\text{S}$  absorberer Surstofgas, indtil det har optaget  $2\text{O}$ , hvorpaa det reduceres efter den før nævnte Formel:



Den Forøgelse i Volum, der foregaar med Svovlvandstoffet ved Svovlsølvets Reduktion med Vandstof, kan omtrentelig bestemmes paa følgende Maade.

1 Gram Svovlsølv indeholder 0.871 Sølv og 0.129 Svovl, og har et Volam lig  $\frac{1}{7.2} = 0.1389$  C.C., da Svovlsølvets specifikke Vægt er lig 7.2.

$$0.129 \text{ Svovl} + \frac{1}{16} \cdot 0.129 \text{ Vandstof} = 0.129 \text{ Svovl} + 0.008$$

H danner 0.137 SH. 1000 C.C. Luft veier 1.299 Gram, 1000 C.C. SH veier 1.547, da Svovlvandstoffets specifikke Vægt er = 1.1912. 0.137 SH indtager et Rum, som ved 0° C. og 28" B. er  $= \frac{0.137}{1.547} \cdot 1000 = 88.58 \text{ C.C.}$ , ved 500° C. og 28" B. = 250.7 C.C. og ved 1000° C. og 28" B. = 412.8 C.C.

Sølvets specifikke Vægt er 10.5. 1 Gram Sølv's Volum er  $= \frac{1}{10.5} \text{ C.C.}$  og 0.871 Gr. Sølv's lig  $\frac{0.871}{10.5} = 0.0829 \text{ C.C.}$  Trækkes Sølvets Volum 0.0829 fra Svovlsølvets Volum 0.1389, faar man Sølvets Volum = 0.0560, der vel ogsaa tilnærmelsesvis repræsenterer Svovlvandstoffets Volum ved dets Friblivelse. Heraf findes at Svovlvandstoffet ved dets Dannelse er fortættest til  $\frac{1}{4477}$  naar ved 28" B. Temperaturen sættes til 500° C. og til  $\frac{1}{7372}$  naar ved 28" B. Temperaturen sættes til 1000° C. Uagtet Volumforegølsen vel ikke bliver fuldt saa stor som 4477 og 7372 ved 500° og 1000° paa Grund af, at det porøse Svovlsølv antagelig har en lavere specifik Vægt end den, der er benyttet ved Beregningen, saa ser man dog saa meget at Svovlvandstoffet vil besidde tilstrækkelig Spændkraft til at presse Sølv et og sig selv ud.

At foretage nogen Beregning over den Fortætning som Svovlvandstofgasen og Surstofgasen antager ved deres Friblivelse under Svovlsølvets Reduktion ved Hjælp af Vandgas undlader jeg, fordi der i dette Tilfælde endmere end i det foregaaende raader formegen Ubestemthed i de Data, der maa lægges til Grund. Dog tvivler jeg ingenlunde paa, at ogsaa disse Gasarter vil opnaa en betydelig Spændkraft.

Det følger af, hvad jeg forhen har anført, at jeg anser Kobberets, Sølvets, det sølvholdige Kobbers, det kobberholdige

Sølv og det blyholdige Kobbers Traad- eller Haarform at være fremkaldt under deres Reduktion og under lignende Forholde. Det er de ved Reduktionen friblivne Gasarter, som under Frijørelsesøieblikket have besiddet en saa mægtig Spændkraft, at de have kunnet presse sig selv og samtidig de reducerede Metaller, der nu først begynde at danne et Continuum, ud ifra det forholdsvis meget lille Reduktionsrum i Stenen eller Svovlmetallet i det Frie.

---

# RESUMÉ EINER NEUEN INTEGRATIONS-THEORIE

VON

SOPHUS LIE.

---

Bei der Integration partieller Differential-Gleichungen 1. O. stellt man bekanntlich successiv gewisse vollständige Systeme auf, und sucht jedesmal *eine* Lösung.

Setzt man nun voraus, dass, man auch wirklich jedesmal nur eine Lösung findet, so kann keine Methode, wie ich in der Abhandlung: «Discussion aller Integrations-Methoden u. s. w.» gezeigt habe, sich mit einfacheren Integrations-Operationen begnügen, als die beiden Methoden, die *Mayer* und ich gleichzeitig in 1872 entwickelten. Allerdings beruht mein Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung auf zwei Forderungs-Sätze, die jedoch äusserst plausibel scheinen. Hiermit ist jedenfalls die Frage, ob noch einfachere Methoden entdeckt werden können, in zwei einfachere Fragen zerlegt, nemlich ob jene Axiome richtig sind.

Setzt man dagegen voraus, dass man bei der Behandlung von den anfangs besprochenen vollständigen Systemen nicht nur eine sondern gleichzeitig mehrere Lösungen eines solchen Systems gefunden hat, so stellt sich das Problem, diesen Umstand möglichst viel zur Vereinfachung des zurückstehenden Integrations-Geschäfts zu verwerthen. Dieses Problem wurde von mir in 1873 gestellt und in mehreren Abhandlungen

(Vergl. insbesondere Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen) eingehend behandelt. Ich entwickelte eine rationelle Theorie, welche lehrte, die noch zurückstehenden Integrations-Operationen ganz bedeutend zu vereinfachen. Ich äusserte dabei die Vermuthung, dass ein grösserer Vortheil sich aus dem besprochenen Umstande nicht ziehen liesse. In meiner «Discussion» deutete ich sogar im Schluss-Paragraphe an, wie man die Richtigkeit dieser Vermuthung würde beweisen können. Als ich aber diesen Beweis durchführen wollte, bemerkte ich, dass hierzu noch erforderlich war, das folgende Problem zu erledigen:

*In welchen Fällen ist es möglich, nachdem eine gewisse Anzahl Lösungen des vollständigen Systems*

$$(F_1, \Phi) = 0 \dots (F_q, \Phi) = 0 \text{ wo } (F_i F_k) = 0$$

*zwischen den unabhängigen Variablen  $x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$  gefunden sind, die übrigen durch ausführbare Operationen aufzustellen.*

Gäbe es keine weiteren Fälle als die früher gekannten, so liesse sich die Richtigkeit meiner Vermuthung nachweisen. Existirten dagegen noch weitere Fälle, so war meine Vermuthung unrichtig.

Es hat sich ergeben, dass man zu den bekannten Fällen, in denen man eine gewisse Anzahl fehlender Lösungen durch ausführbare Operationen aufstellen kann, noch eine ganze Reihe weiterer Fälle hinzufügen kann. Es besteht nemlich der folgende Satz:

*Satz.* Kennt man unter den Lösungen des vollständigen Systems

$$(1) \quad (f_1, f) = 0 \dots f_q f = 0 \text{ wo } (f_i f_k) = 0$$

eine so grosse Anzahl,  $f_{q+1} \dots f_\infty$  dass eine Bedingungs-gleichung der Form

$$p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n = F_1 df_1 + \dots + F_\infty df_\infty + dU$$



stattfindet, so befriedigen  $F_{q+1} \dots F_{\omega}$  das System (1), dessen sämtliche Lösungen Funktionen von  $f_1 \dots f_{\omega}$   $F_{q+1} \dots F_{\omega}$  sind. Die Grösse  $U$  befriedigt die Gleichungen

$$[F_1, z - U] = 0 \dots [F_q, z - U] = 0.$$

Fasst man die Grössen  $x_1 \dots x_n$   $p_1 \dots p_n$  als Funktionen von  $2n$  neuen unabhängigen Variabeln auf, nemlich von  $f_1 \dots f_{\omega}$  zusammen mit  $2n - \omega$  weiteren Grössen  $u_1 \dots u_{2n-m}$ , so sind die Grössen  $F_1$  und  $U$  durch die folgenden Formeln bestimmt

$$\begin{aligned} U &= \int \sum_i \sum_k p_k \frac{dx_k}{du_i} du_i \\ F_s &= \int \sum_i \sum_k \left( \frac{dp_k}{du_i} \frac{dx_k}{df_s} - \frac{dx_k}{du_i} \frac{dp_k}{df_s} \right) du_i \\ &\quad - \frac{dU}{df_s} + \sum_k P_k \frac{dX_k}{df_s} \end{aligned}$$

Hiermit ist die Integration des vorgelegten Involutions-Systems  $F_1 = \alpha_1 \dots F_q = \alpha_q$  vermöge einer Quadratur geleistet.

Dieser merkwürdige Satz lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

Kennt man unter den Lösungen des Systems

$$F_1 \Phi(f_1, f) = 0 \dots (f_q, f) = 0 \quad \text{wo } (f_i, f_k) = 0$$

eine so grosse Anzahl  $f_{q+1} \dots f_{\omega}$ , dass die Gleichungen

$$f_1 = \text{Const.} \dots f_{\omega} = \text{Const.}$$

den Ausdruck  $p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$  in ein vollständiges Differential  $dU$  umwandeln, so verlangt die Integration des vorgelegten Involutions-Systems, nachdem man  $U$  durch eine Quadratur bestimmt hat, nur gewisse Differentiationen.

Dieser Satz umfasst als Grenzfälle einerseits die Jacobische Theorie des letzten Multipliers, angewandt auf partielle Differential-Gleichungen 1. O., andererseits den folgenden Jacobischen Satz:

Bestimmen die Gleichungen  $F_1 = \alpha_1 \dots F_n = \alpha_n$  die Grössen  $p_1 \dots p_n$  derart als Funktionen von  $x_1 \dots x_n$ , dass der Ausdruck

$\sum p_i dx_i$  integrabel wird, so verlangt die Integration einer jeden Gleichung  $F_k = a_k$  nur ausführbare Operationen.

In gewissen Fällen giebt mein Theorem Lösungen, die man ohne Quadratur durch Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems erhalten könnte. Doch ist das letztgenannte Theorem keineswegs als Specialfall in meinem Satze enthalten.

Aber ausserdem giebt mein Theorem die fehlenden Lösungen in *einer Reihe Fälle*, die man früher nicht behandeln wusste. Hervorzuheben ist übrigens auch, dass die beiden obengenannten Jacobischen Theorien, die in meinem Theoreme als Specialfälle enthalten sind, eben durch dasselbe eine grössere Einfachkeit erhalten, wie wir später näher nachweisen.

Ich liefere zwei wesentlich verschiedene Beweise meines Satzes, indem ich ihn successiv als Verallgemeinerung einer jeden der beiden besprochenen Jacobischen Theorien auffasse. Im vierten Paragraphe entwickle ich darnach eine weitere Integrations-Theorie, die sich sowohl auf das Mayersche Theorem, wie auch insbesondere auf meine eigenen früheren Untersuchungen stützt, welche die Tragweite meines Theorems ganz bedeutend erweitert.

Endlich beweise ich im fünften Paragraphe, dass die dargestellten Theorien den grösstmöglichen Vorthail aus mehreren bekannten Lösungen zu ziehen erlauben.

## § 1.

### Ein Fundamental-Theorem.

Zunächst beweise ich zwei Hilfsätze und erhalte sodann durch ihre Vereinigung das angekündigte Theorem.

*Satz 1. Sind  $f_1 \dots f_\infty$  bekannte Funktionen von  $x_1 \dots x_n$ ,  $p_1 \dots p_n$ , die eine Relation der Form*

$$\sum p dx = F_1 df_1 + \dots + F_\infty df_\infty = dU \quad (2)$$

erfüllen, so lassen sich  $U$  durch eine Quadratur und darnach die  $F_k$  durch eine Anzahl Differentiationen bestimmen.

*Beweis.* Ich drücke  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$  als Funktionen von  $f_1 \dots f_\omega$  und  $2n - \omega$  passend gewählten Grössen  $u_1 \dots u_{2n-\omega}$  aus

$$\begin{aligned} x_k &= X_k(f_1 \dots f_\omega u_1 \dots u_{2n-\omega}) \\ p_k &= P_k(\dots\dots\dots) \end{aligned}$$

und führe sodann die  $f$  und  $u$  als unabhängige Variablen anstatt der Grössen  $x p$  in (2) hinein. Dies giebt

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k P_k \frac{dX_k}{du_i} du_i + \sum_i \sum_k P_k \frac{dX_k}{df_i} df_i \\ - \sum_i F_i df_i + \sum_i \frac{dU}{du_i} du_i + \sum_i \frac{dU}{df_i} df_i, \end{aligned}$$

welche Gleichungen sich in die beiden Systeme

$$\frac{dU}{du_i} = \sum_k P_k \frac{dX_k}{du_i} \quad (3)$$

$$F_j = - \frac{dU}{df_j} + \sum_k P_k \frac{dX_k}{df_j} \quad (4)$$

zerlegen. Das erste System giebt durch Integration

$$U = \int \sum_i \sum_k P_k \frac{dX_k}{du_i} du_i + \Omega(f_1 + \dots f_\omega) \quad (5)$$

wo  $\Omega$  eine arbiträre Funktion der  $f$  bezeichnet, und wenn man diesen Werth in (4) einsetzt, findet man die  $F_j$  ohne weitere Quadratur. Man erhält übrigens einen eleganteren Ausdruck für  $F_j$ , indem man zwischen (3) und (4) die Grösse  $U$  eliminirt, und darnach den hervorgehenden Ausdruck

$$\frac{dF_j}{du_i} = \sum_k \left( \frac{dP_k}{du_i} \frac{dX_k}{df_j} - \frac{dP_k}{df_j} \frac{dX_k}{du_i} \right)$$

integriert, wodurch kommt

$$F_j = \int \sum_i \sum_k \left( \frac{dP_k}{du_i} \frac{dX_k}{df_j} - \frac{dP_k}{df_j} \frac{dX_k}{du_i} \right) du_i.$$

Diese letzte Formel enthält als Integrations-Constante eine arbiträre Funktion von den  $f$ , die durch Einsetzung in (2)

bestimmt wird. Anwendet man dagegen die Formeln (5) und (4), so ist es klar, dass man die Funktion  $\Omega$  ganz arbiträr wählen kann, dabei selbstverständlicherweise vorausgesetzt, dass sich die Gleichung (2) überhaupt befriedigen lässt.

**Satz 2.** *Ich setze voraus, dass  $f_1 = a_1 \dots f_q = a_q$  ein vorgelegtes Involutions-System ist, und dass man unter den Lösungen des vollständigen Systems*

$$(6) \quad (f_1 f) = 0 \dots (f_q f) = 0$$

*eine so grosse Anzahl  $f_{q+1} \dots f_r$  gefunden hat, dass es überhaupt  $n$ -gliedrige Involutions-Systeme gibt, deren Funktionen sämtlich die Form  $\psi_k(f_1 \dots f_r)$  besitzen. Alsdann ist es immer möglich die fehlenden Lösungen des Systems (6) durch ausführbare Operationen zu bestimmen. Ebenso findet man die allgemeinste Funktion, welche den Gleichungen  $[f_1, z - U] = 0 \dots [f_q, z - U] = 0$  genügt, durch ausführbare Operationen.*

**Beweis.** Da es  $n$ -gliedrige Involutions-Systeme der Form  $\psi_k(f_1 \dots f_r)$  gibt, können wir schliessen, dass es auch  $n$ -gliedrige Involutions-Systeme der Form

$$f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} (f_1 \dots f_r) \varphi_{q+2} \dots \varphi_n$$

gibt. Daher besteht eine Relation

$$(7) \quad \sum p dx = F^0, df_1 + \dots + F_q^0 df_q + \Phi_{q+1} d\varphi_{q+1} + \dots + \Phi_n d\varphi_n + dU,$$

welche bekanntlich die folgenden Gleichungen

$$(8) \quad (f_1 \varphi_k) = 0, (f_1 \Phi_k) = 0 [f_1, z - U] = 0$$

nach sich zieht. Denkt man sich nun in (7) die  $\varphi_k$  als Funktionen der  $f$  ausgedrückt, so kommt eine Relation der Form

$$\sum p dx = F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + dU, \quad (9)$$

wo  $F_{q+1} \dots F_r$  als Funktionen von  $\Phi_{q+1} \dots \Phi_n f_1 \dots f_r$

$$F_{q+k} = \Phi_{q+1} \frac{d\varphi_{q+1}}{df_{q+k}} + \dots + \Phi_n \frac{d\varphi_n}{df_{q+k}}$$

dem Systeme (6) genügen.

Die letzten Formeln zeigen zugleich, indem man die

Unabhängigkeit der Grössen  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_n$  berücksichtigt, dass  $\Phi_{q+1} \dots \Phi_n$  sich als Funktionen von  $F_{q+1} \dots F_r f_1 \dots f_r$  ausdrücken lassen. Und da wegen (7) alle Lösungen des Systems (6) Funktionen von  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_n \Phi_{q+1} \dots \Phi_n$  sind, folgt, dass alle Lösungen Funktionen von den Lösungen  $F_{q+1} \dots F_r f_1 \dots f_r$  sind. Die Grössen  $F_k$  lehrten wir aber in dem vorangehenden Satze bis auf eine unwesentliche Funktion von  $f_1 \dots f_r$  zu bestimmen.

Bestimmt man ferner nach demselben Satze die Grösse  $U$  aus der Gleichung (9), die mit (7) äquivalent ist, so findet man wegen (8) die allgemeinste Grösse, welche den Gleichungen  $[f_1, z - U] = 0 \dots [f_q, z - U] = 0$  genügt. —

*Theorem 1. Kennt man unter den Lösungen des vollständigen Systems*

$$(10) \quad (f_1 f) = 0 \dots (f_q f) = 0 \quad \text{wo} \quad (f_i f_k) = 0$$

*eine so grosse Anzahl  $f_1 \dots f_q \dots f_r$ , dass eine Relation der Form*

$$\sum p dx = F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + dU$$

*besteht, so sind  $F_{q+1} \dots F_r$  die fehlenden Lösungen des Systems (10), während  $U$  die Gleichungen*

$$[f_1, z - U] = 0 \dots [f_q, z - U] = 0 \quad (11)$$

*erfüllt. Führt man statt  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$  neue unabhängige Variabeln ein, nemlich  $f_1 \dots f_r$  zusammen mit  $2n-r$  passend gewählten weiteren Grössen  $u_1 \dots u_{2n-r}$ , so ist*

$$\begin{aligned} U &= \int \sum_i \sum_k p_k \frac{dx_k}{du_i} du_i \\ F_j &= - \frac{dU}{df_j} + \sum p_k \frac{dx_k}{df_j} \\ &= \int \sum_j \sum_k \left( \frac{dp_k}{du_i} \frac{dx_k}{df_j} - \frac{dp_k}{df_j} \frac{dx_k}{du_i} \right) du_i \end{aligned}$$

*die Ausdrücke der fehlenden Lösungen der Systeme (10) und (11).*

**Beweis.** Zu den bekannten Lösungen  $f_1 \dots f_r$  des Systems (10) kann man sich so viele weitere Lösungen  $f_{r+1} \dots f_s$  zugefügt denken, dass es  $n$ -gliedrige Involutions-Systeme der Form  $\psi_i(f_1 \dots f_s)$  giebt, und also eine Relation der Form

$$\sum p dx = \Psi_1 df_1 + \dots + \Psi_r df_r + dV$$

besteht. Nach dem vorangehenden Satze sind dann  $\Psi_{q+1} \dots \Psi_r$  Lösungen des Systems (10), während  $V$  das System (11) befriedigt.

Nun aber kennen wir schon eine solche Relation nemlich

$$(2) \quad \sum p dx = F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + dU$$

und folglich ist  $U$  eine Lösung von (11), während  $F_{q+1} \dots F_r$  das System (10) befriedigen. Es steht zurück nachzuweisen, dass alle Lösungen von (10) Funktionen von  $f_1 \dots f_r, F_{q+1} \dots F_r$  sind, oder anders ausgesprochen, dass es unter diesen Grössen  $2n-q$  giebt, die von einander unabhängig sind.

Gäbe es nur  $2n-q-e$  unabhängige unter jenen Grössen, so enthielte der Ausdruck

$$F_1 df_1 + \dots + F_r df_r$$

nur  $2n-e$  unabhängige Grössen, und könnte daher nach der Theorie des Pfaffschen Problems jedenfalls die Form

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \dots + \Phi_{n-1} d\varphi_{n-1} + dW$$

erhalten, woraus

$$\sum p dx = \Phi_1 d\varphi_1 + \dots + \Phi_{n-1} d\varphi_{n-1} + d(W + U)$$

folgen würde. Dies ist aber bekanntlich eine unmögliche Gleichung, und folglich sind  $F_{q+1} \dots F_r$  die fehlenden Lösungen des Systems (10).

Berücksichtigt man endlich die im Anfange dieses Paragraphes gegebene Bestimmung der Grössen  $U$  und  $F_i$ , so erkennt man die Richtigkeit unseres Theorems.

Ich werde zeigen, dass Satz 2 vereinigt mit dem Poisson-Jacobischen Theoreme ebensoviel wie Theorem I leistet. Es besteht in der That der folgende Satz.

**Satz 3.** Sind  $f_1 \dots f_r$  Funktionen von  $x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$ , die eine Relation der Form

$$\sum p dx = F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + dU \quad (13)$$

erfüllen, so enthält die aus  $f_1 \dots f_r$  durch Anwendung des Poisson-Jacobischen Theorems hervorgehende Gruppe  $n$ -gliedrige Involutions-Systeme und besitzt daher die canonische Form  $X_1 \dots X_n, P_1 \dots P_n$ .

**Beweis.** Sei  $X_1 \dots X_n, P_1 \dots P_n$  die canonische Form derjenigen Gruppe, die aus  $f_1 \dots f_r$  vermöge des Poisson-Jacobischen Theorems hervorgeht. Wir haben zu zeigen, dass  $u$  gleich  $n$  ist.

Ersetzen wir in (13) die  $f_k$  durch die entsprechenden Funktionen von  $X_1 \dots X_n, P_1 \dots P_n$ , so kommt eine Relation der Form

$$\sum p dx = \sum_1^u A_k dX_k + \sum_1^{u-s} B_k dP_k + dU.$$

Sind andererseits  $X_1 \dots X_n, P_1 \dots P_n$  ein System canonischer Variabeln, so ist bekanntlich

$$\sum p dx = P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n + dV.$$

Also kommt

$$\sum_1^n P_k dX_k = \sum_1^u A_k dX_k + \sum_1^{u-s} B_k dP_k + d(U - V)$$

und wenn wir hier die Substitution

$X_1 = \text{Const.} \dots X_n = \text{Const.}, P_1 = \text{Const.} \dots P_n = \text{Const.}$  machen, folgt

$$\sum_k P_{u+k} dX_{u+k} + dW = 0.$$

Da nun aber die Grössen  $P$  und  $X$  von einander unabhängig sind, so müssen die beiden Glieder der letzten Gleichung verschwinden, was wieder heisst, dass  $u$  gleich  $n$  sein muss.

## § 2.

**Bekannte Specialfälle der vorangehenden Theorie.**

Das aufgestellte Theorem umfasst zwei berühmte Jacobische Theorien, nemlich die Anwendung der Multiplicator-Theorie auf die partiellen Differential-Gleichungen 1. O., und andererseits den folgenden Fundamental-Satz der Jacobischen Integrations-Theorie:

Bestimmen die Gleichungen  $F_1 = \alpha_1 \dots F_n = \alpha_n$  die Grössen  $p_1 \dots p_n$  derart als Functionen von  $x_1 \dots x_n$  und den Constanten  $\alpha$ , dass  $p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$  ein vollständiges Differential  $dU$  wird, so ist  $z - U = a$  eine vollständige Lösung einer jeden Gleichung  $F_k = \alpha_k$ ; die Differential-Quotienten von  $U$  hinsichtlich  $\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+1} \dots \alpha_n$  sind zusammen mit den Grössen  $F$  die Lösungen der Gleichung  $(F_k \Phi) = 0$ .

Diesen Satz verallgemeinerte ich schon längst folgendermassen:

Sind  $F_1 \dots F_n$  bekannte unabhängige Functionen von  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$ , die in solcher gegenseitigen Beziehung stehen, dass die Gleichungen  $F_1 = \text{Const.} \dots F_n = \text{Const.}$  den Ausdruck  $p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$  zu einem vollständigen Differential umwandeln, so findet man eine vollständige Lösung einer jeden Gleichung  $F_k = \alpha_k$  durch eine Quadratur und darnach alle Lösungen der Gleichung  $(F_k \Phi) = 0$  durch Differentiation.

In dieser Weise verallgemeinert ist die betreffende Jacobische Theorie offenbar ein Specialfall meines Theorems I.

Mehr überraschend ist es, dass die Bestimmung der letzten Lösung der Gleichung  $(F \Phi) = 0$ , die Jacobi vermöge seiner Multiplicator-Theorie ausführt, in allen Fällen, die nicht schon durch das Poisson-Jacobische Theorem erledigt werden, durch mein Theorem geleistet wird.

Kennt man nemlich unter den Lösungen der Gleichung  $(f, f) = 0$  alle ausgenommen die letzte, etwa  $f_1 \dots f_r$ , und ist



es dabei unmöglich die fehlende Lösung ohne Quadratur durch das Poisson-Jacobische Theorem aufzustellen, so bilden die  $f_k$  eine Gruppe, welche die canonische Form  $X_1 \dots X_n P_1 \dots P_{n-2}$  besitzt, und daher  $n$ -gliedrige Involutions-Systeme enthält. Folglich wird die Bestimmung der fehlenden Lösung durch mein Theorem geleistet.

Doch ist es keineswegs so, dass die betreffende Specialisation meines Theorems sich mit der entsprechenden Jacobischen Theorie deckt. Die Jacobische Theorie leistet insofern mehr, wie sie die letzte Lösung auch dann durch eine Quadratur giebt, wenn dieselbe sich einfacher durch das Poisson-Jacobische Theorem finden lässt. Auf der anderen Seite ist meine Behandlungs-Weise insofern mehr vollkommen, wie sie vermöge *einer* Quadratur nicht allein die fehlende Lösung von  $(f_1, f) = 0$  sondern auch die allgemeine Lösung von  $[f_1, z - U] = 0$  giebt, so dass eine vollständige Lösung von  $f_1 = a_1$  sich ohne weitere Quadratur aufstellen lässt. Die Jacobische Methode braucht dagegen einer zweiten Quadratur zur Aufstellung einer vollständigen Lösung.

Soll also die Gleichung  $f_1 = a_1$  integrirt werden, so ist es, wenn nur eine Lösung von  $(f, f) = 0$  fehlt, zweckmässigst *Theorem I* anzuwenden, wenn nicht zufälligerweise schon das Poisson-Jacobische Theorem die fehlende Lösung giebt. In beiden diesen Fällen verlangt die Aufstellung einer vollständigen Lösung *eine* Quadratur.

Es giebt Fälle, in denen mein Theorem dieselben Lösungen wie das Poisson-Jacobische Theorem giebt. Kennt man nemlich unter den Lösungen des vollständigen Systems

$$(f_1, f) = 0 \dots (f_r, f) = 0 \quad \text{wo} \quad (f_i, f_k) = 0$$

eine so grosse Anzahl  $f_1 \dots f_r$ , dass eine Bedingungs-Gleichung der Form

$$\sum p \, dx = \sum F_k \, df_k + dU$$

besteht, so giebt mein Theorem unter allen Umständen die fehlenden Lösungen. Bilden nun  $f_1 \dots f_r$  keine Gruppe, so giebt das Poisson-Jacobische Theorem jedenfalls einige, und unter Umständen sogar alle fehlenden Lösungen durch Differentiation. Wenn aber auch alle Lösungen ohne Quadratur gefunden werden, so verlangt doch die Aufstellung einer vollen Lösung eine Quadratur, wie nach meiner Methode.

Nichtsdestoweniger muss man das Poisson-Jacobische Theorem und mein Theorem als von einander ganz unabhängig betrachten. Jedes Theorem hat seine besondere Tragweite.

Admittirt man zwei sozusagen evidente Forderungs-Sätze, so kann man beweisen, dass eine jede Methode, die dazu dient, neue Lösungen von  $(f_k f) = 0$  aus bekannten Lösungen herzuleiten, sich unter jenen beiden Theoremen subsumirt. Hiertüber ausführlicher bei einer anderen Gelegenheit

### § 3.

#### Neue Begründung des aufgestellten Theorems.

In diesem Paragraphen zeige ich, dass die von mir in der Abhandlung: «Verallgemeinerung und neue Verwerthung der Jacobischen Multiplicator-Theorie» dargestellten Theorien sozusagen unmittelbar auf das aufgestellte Theorem, das übrigens eben auf diesem Wege gefunden wurde, führen. Doch erhalte ich nicht in dieser Weise mein Theorem in einer so vollkommenen Form wie in Paragraph 1. Ich erkenne nemlich allerdings, dass in dem betreffenden Falle die fehlenden Lösungen durch Quadraturen gefunden werden können. Dass jedoch alle diese Quadraturen sich auf eine einzige Quadratur reduciren lassen, indem die betreffenden Integrale aus einem einzigen Integrale durch Differentiation hergeleitet werden können, liegt bei dieser Begründungsweise tiefer versteckt.

Es wird übrigens aus diesem Paragraphen hervorgehen,

dass die Eulersche Theorie des Integrabilitätsfaktors vereinigt mit dem Poisson-Jacobischen Theoreme für die partiellen Differential-Gleichungen 1. O. ebensoviel wie die Jacobische Multiplikator-Theorie leistet.

Sei

$$f_1 - \alpha_1 \dots f_q - \alpha_q \quad \text{wo } (f_i, f_k) = 0$$

ein vorgelegtes Involutions-System, und  $\varphi_{q+1} \dots \varphi_r$  bekannte Lösungen des vollständigen Systems

$$(14) \quad (f_1 \varphi) = 0 \dots (f_q \varphi) = 0,$$

die von einander und von  $f_1 \dots f_q$  unabhängig sind. Setzen wir nun

$$(\varphi_k \varphi) = A_k \varphi, \quad (\varphi_k \varphi) = B_k \varphi,$$

so finden wir mit Berücksichtigung der Relationen  $(f_i \varphi_k) = 0$ , dass alle Ausdrücke

$$A_i (B_k (\varphi)) - B_k (A_i (\varphi))$$

gleich Null sind. Wir kennen also, können wir sagen, nicht allein  $r-q$  Lösungen  $\varphi_{q+1} \dots \varphi_r$  des vollständigen Systems (14), sondern auch  $r-q$  infinitesimale Transformationen  $B_{q+1} \varphi \dots B_r \varphi$ , welche unser vollständiges System invariant lassen.

In der citirten Abhandlung lehrten wir aber den Umstand, dass gleichzeitig gewisse Lösungen und gewisse infinitesimale Transformationen eines zur Integration vorgelegten vollständigen Systems bekannt sind, zu verwerthen. Indem wir die in jener Abhandlung gegebenen Regeln genau folgen, werden wir mit Nothwendigkeit auf ein Theorem geführt, das im Wesentlichen mit Theorem I äquivalent ist.

Zuerst sollen wir versuchen durch ausführbare Operationen weitere Lösungen und weitere infinitesimale Transformationen unseres Systems aufzustellen. Zu diesem Zwecke haben wir die Ausdrücke  $B_i (B_k (\varphi)) - B_k (B_i (\varphi))$ , welche

infinitesimale Transformationen des Systems repräsentiren, zu bilden. Es ist

$$B_1(B_k(\varphi)) - B_k(B_1(\varphi)) = ((\varphi_1 \varphi_k) \varphi);$$

folglich ist  $((\varphi_1 \varphi_k) \varphi)$  eine infinitesimale Transformation unseres Systems, was wieder heisst, dass  $(\varphi_1 \varphi_k)$  eine Lösung desselben ist. Vorläufig giebt also die Anwendung unserer allgemeinen Regeln nur das Poisson-Jacobische Theorem. Seien  $\varphi_{q+1} \dots \varphi_r \dots \varphi_s$  diejenigen unabhängigen Lösungen, die wir in dieser Weise erhalten, und seien

$$(\varphi_{q+1} \varphi) = B_{q+1} \varphi \dots \dots (\varphi_s \varphi) = B_s \varphi$$

die entsprechenden infinitesimalen Transformationen.

Jetzt sollen wir nach unseren allgemeinen Regeln die Grössen

$$f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_s$$

zusammen mit  $2n-s$  passend gewählten weiteren Grössen  $u_1 \dots u_{2n-s}$  als unabhängige Variablen anstatt  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$  einführen. Dies giebt

$$A_k \varphi = (f_k \varphi) = \sum_i (f_k u_i) \frac{d\varphi}{du_i} \\ B_k \varphi = \sum_i (\varphi_k \varphi_i) \frac{d\varphi}{d\varphi_i} + \sum_i (\varphi_k u_i) \frac{d\varphi}{du_i}.$$

Wir wissen, dass unser vollständiges System jede infinitesimale Transformation der allgemeinen Form

$$C\varphi = \sum_k \pi_k (f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_s) B_k \varphi$$

gestattet. Wir sollen versuchen, die Grössen  $\pi$  derart zu wählen, dass der Ausdruck  $C\varphi$  nur die Differential-Quotienten von  $\varphi$  hinsichtlich der  $u_i$ , dagegen keine Differential-Quotienten hinsichtlich der  $\varphi_i$  enthält. Es fragt sich, ob die  $s-q$  Gleichungen

$$(15) \quad \pi_{q+1} (\varphi_{q+1} \varphi_k) + \dots \dots + \pi_s (\varphi_s \varphi_k) = 0 \quad (k = q+1 \dots s)$$

befriedigt werden können; ob also die Determinante

$$D = [(\varphi_{q+1} \varphi_{q+1}) \dots (\varphi_s \varphi_s)]$$

verschwindet oder von Null verschieden ist.

Setzen wir, wie im ersten Paragraphe, voraus, dass die Gruppe  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_s$  die canonische Form  $X_1 \dots X_n P_1 \dots P_{n-m-q}$  besitzt, so werden wir finden, dass die  $m$  fehlenden Lösungen des Systems  $A_k \varphi = 0$  sich durch  $m$  Quadraturen aufstellen lassen.

Die Gruppe der  $f$  und  $\varphi$  enthält ausser  $f_1 \dots f_q$   $m$  ausgezeichnete Funktionen, die  $\Omega_1 \dots \Omega_m$  heissen mögen. Daher verschwindet die Determinante  $D$ , wie auch ihre Unterdeterminanten erster, zweiter  $\dots$  bis  $(m-1)^{\text{ter}}$  Ordnung. Und folglich bestimmen die Gleichungen (15) die Grössen  $\pi$  als lineare Funktionen von  $m$  unter ihnen, etwa von  $\pi_{q+1} \dots \pi_{q+m}$ . Die allgemeinste infinitesimale Transformation  $C\varphi$  besitzt daher die Form

$$\pi_{q+1} C_1 \varphi + \dots + \pi_{q+m} C_m \varphi$$

wo die  $C_k \varphi$  ganz bestimmte Grössen, die zurückgebliebenen  $\pi_k$  dagegen arbiträre Funktionen der  $f$  und  $\varphi$  bezeichnen. Insbesondere sind  $C_1 \varphi \dots C_m \varphi$  selbst infinitesimale Transformationen der verlangten Form, die unser vollständiges System invariant lassen.

Da die ausgezeichneten Funktionen  $\Omega$  Funktionen von den  $f$  und  $\varphi$  sind, folgt dass die  $(\Omega_k \varphi)$  sich folgendermassen ausdrücken lassen:

$$(\Omega_k \varphi) = \sum_i \Theta_{ki} (f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_s) B_i \varphi;$$

auf der anderen Seite ist

$$(\Omega_k \varphi) = \sum_i (\Omega_k u_i) \frac{d\varphi}{du_i}.$$

Also bestehen  $m$  Relationen der Form

$$(\Omega_k \varphi) = \sum_i \pi_{ki} (f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_s) C_i \varphi,$$

und da keine lineare Relation zwischen den  $(\Omega_k \varphi)$  bestehen darf, folgt einerseits, dass die infinitesimalen Transformationen

$C_1 \varphi$  von einander unabhängig sind, andererseits dass sie sich folgendermassen ausdrücken lassen:

$$C_1 \varphi = \sum_k \psi_{1k} (f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_n) (\Omega_k \varphi).$$

Berücksichtigt man daher, dass die  $C_1 \varphi$  nur Differential-Quotienten hinsichtlich der  $u$  enthalten, ferner dass alle  $(\Omega_i \Omega_k)$  gleich Null sind, so folgt, dass alle Ausdrücke  $C_1 (C_k(\varphi)) - C_k (C_1(\varphi))$  verschwinden.

Hiermit hat unser Problem die folgende Gestalt genommen: Vorgelegt ist ein  $q$ -gliedriges vollständiges System zwischen  $q + m$  Variablen

$$A_k \varphi = \sum_i (f_k u_i) \frac{d\varphi}{du_i} = 0,$$

und man kennt  $m$  Ausdrücke  $C_1 \varphi \dots C_m \varphi$ , welche die Gleichungen

$$A_i (C_k(\varphi)) - C_k (A_i(\varphi)) = 0,$$

$$C_i (C_k(\varphi)) - C_k (C_i(\varphi)) = 0$$

erfüllen. Man soll das vollständige System integrieren.

Nach meiner allgemeinen Theorie geschieht dies, indem man das vollständige System

$$A_1 \varphi = 0 \dots A_q \varphi = 0, C_1 \varphi = 0 \dots C_{r-1} \varphi = 0, C_{r+1} \varphi = 0 \dots C_m \varphi = 0$$

oder auch die entsprechende totale Differential-Gleichung

$$W_{r,1} du_1 + \dots + W_{r,m+q} du_{m+q} = 0$$

aufstellt, und darnach die durch die Ausdrücke

$$A_k \varphi = \sum_i U_{ki} \frac{d\varphi}{du_i}, \quad C_k \varphi = \sum_i V_{ki} \frac{d\varphi}{du_i}$$

bestimmte Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & U_{1,m+q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{q,1} & U_{q,2} & \dots & U_{q,m+q} \\ V_{1,1} & V_{1,2} & \dots & V_{1,m+q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{m,1} & V_{m,2} & \dots & V_{m,m+q} \end{vmatrix}$$

bildet. Alsdann ist  $\frac{1}{\Delta}$  ein Integrabilitätsfaktor unserer totalen Differential-Gleichung, und folglich ist

$$L_r - \int \frac{1}{\Delta} (W_{r,1} du_1 + \dots + W_{r,m+q} du_{m+q})$$

ein Integral unserer totalen Gleichung, und also auch eine Lösung des Systems  $A_k \varphi = 0$ .

Giebt man  $r$  successiv die Werthe  $1, 2 \dots m$ , so erhält man  $m$  Lösungen  $L_1 \dots L_m$ , die von einander, wie von den  $f$  und  $\varphi$  unabhängig sind, welche also eben die fehlenden Lösungen des Systems  $A_k \varphi = 0$  sind.

Hiermit sind wir zu dem in Anfange dieses Paragraphs angekündigte Resultat gekommen.

#### § 4.

#### Allgemeine Verwerthung mehrerer bekannten Lösungen.

Um den vollen Nutzen aus Theorem I ziehen zu können, ist es nothwendig, eine neue Theorie zu entwickeln.

Sei wie früher  $f_1 = \alpha_1 \dots f_q = \alpha_q$  ein zur Integration vorgelegtes Involutions-System und  $\varphi_{q+1} \dots \varphi_r$  bekannte Lösungen des vollständigen Systems

$$(f_1 \varphi) = 0 \dots (f_q \varphi) = 0; \quad (16)$$

wir setzen voraus, dass sich keine weiteren Lösungen durch das Poisson-Jacobische Theorem finden lassen, dass also  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_r$  eine Gruppe bilden, und zwar eine Gruppe, die ausser den  $f$  noch  $m$  ausgezeichnete Funktionen  $\Omega_1 \dots \Omega_m$  enthält. Wir werden zeigen, dass man immer die noch fehlenden  $m + 2l$  Lösungen des Systems (16) vermöge der Operationen  $2l, 2l - 2 \dots 6, 4, 2$  bestimmen kann.

Kannte man zufälligerweise die ausgezeichneten Funktionen  $\Omega_1 \dots \Omega_m$ , so könnte man das System

$$(f_1 \varphi) = 0 \dots (f_q \varphi) = 0, (\Omega_1 \varphi) = 0 \dots (\Omega_m \varphi) = 0 \quad (17)$$

aufstellen, und da man schon die Lösungen  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_r$

kennt, könnte man eine weitere Lösung durch eine Operation  $2l$  finden. Kennt man dagegen nicht die Grössen  $\Omega$ , so sieht man nicht unmittelbar ein, dass man nichtsdestoweniger das System (17) aufstellen kann. Dies ist jedoch immer möglich, wie jetzt gezeigt werden soll.

Wir führen statt  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$  neue unabhängige Variabeln ein, nemlich  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_r$  zusammen mit  $m + q + 2l - \omega$  weiteren Grössen  $u_1 \dots u_\omega$ . Alsdann kommt

$$(f_k \varphi) - \sum_i (f_k u_i) \frac{d\varphi}{du_i} = 0 = A_k \varphi$$

$$(\varphi_k \varphi) - \sum_i (\varphi_k \varphi_i) \frac{d\varphi}{d\varphi_i} + \sum_i (\varphi_k u_i) \frac{d\varphi}{du_i} = B_k \varphi.$$

Wir setzen

$$C\varphi = \sum_i \pi_{ki} (f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_r) B_i \varphi$$

und versuchen die  $\pi$  derart zu wählen, dass  $C\varphi$  nur Differential-Quotienten hinsichtlich der  $u_i$  enthält. Dies giebt wie im vorigen Paragraphen für  $C\varphi$  einen Ausdruck der Form

$$\pi_{q+1} C_1 \varphi + \dots + \pi_{q+m} C_m \varphi;$$

und man erkennt wie damals, dass das Gleichungs-System

$$(18) \quad (f_1 \varphi) = 0 \dots (f_q \varphi) = 0, C_1 \varphi = 0 \dots C_m \varphi = 0,$$

das wir aufstellen können, mit dem Systeme

$$(17) \quad (f_1 \varphi) = 0 \dots (f_q \varphi) = 0, (\Omega_1 \varphi) = 0 \dots (\Omega_m \varphi) = 0,$$

das wir nicht unmittelbar aufstellen können, äquivalent ist.

Da nun das  $(m+q)$ gliedrige System (18) ausser der als Constanten auftretenden Grössen  $f, \varphi$  nur  $m+q+2l$  unabhängige Variabeln, nemlich die  $u$  enthält, so findet man eine Lösung  $\psi_1$  durch eine Operation  $2l$ . Es ist hierbei sehr merkwürdig, dass eine jede Lösung  $\psi_1$  jedenfalls denselben Nutzen wie zwei solche Lösungen macht. Um dies nachzuweisen, müssen wir die verschiedenen Fälle, die eintreten können, berücksichtigen.

Es ist zunächst möglich, dass die bekannten Lösungen



des Systems (18) nemlich  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_r \psi_1$  eine Gruppe bilden. Ist dies der Fall, so sind  $f_1 \dots f_q \Omega_1 \dots \Omega_m$  wegen der Gleichungen (17), die mit (18) äquivalent sind, ausgezeichnete Funktionen dieser Gruppe. Und da die Differenz zwischen der Zahl der Glieder und der Zahl der ausgezeichneten Funktionen in einer jeden Gruppe eine grade Zahl sein muss, folgt, dass die neue Gruppe  $m + q + 1$  ausgezeichnete Funktionen enthalten muss. Bezeichnen wir die hinzutretende ausgezeichnete Funktion mit  $W$ , so ist es immer möglich, indem wir wie früher verfahren, ein vollständiges System aufzustellen, das mit

$(f_1 \varphi) = 0 \dots (f_q \varphi) = 0, (\Omega_1 \varphi) = 0 \dots (\Omega_m \varphi) = 0, (W \varphi) = 0$  äquivalent ist. Und da man  $r + 1$  Lösungen dieses Systems kennt nemlich  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_r \psi_1$ , findet man eine weitere Lösung durch eine Operation  $2l - 2$  u. s. w.

Es ist andererseits auch denkbar, dass  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_r \psi_1$  keine Gruppe bilden. Alsdann giebt das Poisson-Jacobische Theorem noch weitere Lösungen, etwa  $\psi_2 \dots \psi_s$  des Systems (18). In der hierdurch hervorgehenden Gruppe sind jedenfalls  $f_1 \dots f_q \Omega_1 \dots \Omega_m$  ausgezeichnete Funktionen, und folglich ist dieser Fall jedenfalls ebenso vortheilhaft wie der soeben betrachtete.

Unter allen Umständen kann man folglich vermöge der Operationen  $2l, 2l - 2 \dots 6, 4, 2$  unser Integrations-Problem auf eine solche Form bringen, dass es sich vermöge des Theorems I erledigen lässt.

*Theorem II. Soll das Involutions-System*

$$f_1 = \alpha_1 \dots f_q = \alpha_q$$

*integrirt werden, und kennt man dabei eine Anzahl Lösungen des vollständigen Systems*

$$(f_1 \varphi) = 0 \dots (f_q \varphi) = 0$$

*etwa  $\varphi_{q+1} \dots \varphi_r$ , so sucht man zuerst weitere Lösungen*

*vermöge des Poisson-Jacobischen Theorems zu bestimmen. Sei  $f_1 \dots f_q \varphi_{q+1} \dots \varphi_r$  die hierdurch bestimmte Gruppe, die ausser der  $f$  noch  $m$  ausgezeichnete Funktionen enthalten mag, welche jedoch im Allgemeinen unbekannt sind. Alsdann verlangt die Integration des vorgelegten Involutions-Systems im ungünstigsten Falle nur noch die Operationen*

$$2n - s - m, 2n - s - m - 2 \dots 6, 4, 2.$$

Um die grosse Wichtigkeit dieses Theorems hervortreten zu lassen, behandle ich einige Beispiele schematisch.

Sei  $f_1 = \alpha_1 \dots f_q = \alpha_q$  das vorgelegte Involutions-System, und seien  $f_{q+1} \dots f_r$  bekannte Lösungen des Systems,

$$(f_1 f) = 0 \dots (f_q f) = 0.$$

Ich setze successiv voraus, dass noch 2, 3, 4, 5, 6 ... Lösungen fehlen; und ich werde die verschiedenen Fälle, die bei ihrer Bestimmung eintreten können, aufzählen. Fehlen insbesondere eine ungrade Anzahl Lösungen, so erlauben meine neuen Theorien immer die zurückstehenden Integrations-Operationen wesentlich zu vereinfachen.

1) Fehlen zwei Lösungen, so sind zwei Fälle möglich; entweder enthält die Gruppe der  $f$  ausser  $f_1 \dots f_r$  keine weiteren ausgezeichneten Funktionen; alsdann brauche ich eine Operation 2 und eine Quadratur, die ich symbolisch mit der Zahl 0 bezeichne. Oder auch enthält unsere Gruppe noch zwei ausgezeichnete Funktionen; alsdann genügt eine Quadratur zur Aufstellung einer vollständigen Lösung. Früher brauchte man die Operationen 2, 1 und eine Quadratur, was ich mit den Zahlen 2,1,0 bezeichne. War insbesondere  $q=1$ , so könnte man die Jacobische Multiplicatorthorie anwenden, und brauchte dann nur eine Operation 2 und zwei Quadraturen.

Ich resumire dieses Beispiel folgendermassen schematisch:

2 ausgezeichnete Funktionen	0
keine ausgezeichneten Funktionen	2,0
früher, wenn $q = 1$	2,0,0
früher, wenn $q > 1$	2,1,0

2) Fehlen noch 3 Lösungen, so sind wiederum zwei Fälle möglich, indem unsere Gruppe entweder nur eine oder auch drei ausgezeichnete Funktionen ausser  $f_1 \dots f_q$  enthalten kann. Gibt es nur eine ausgezeichnete Funktion, so brauche ich eine Operation 2 und eine Quadratur, gibt es drei ausgezeichnete Funktionen, so genügt eine Quadratur. Früher brauchte man im Allgemeinen die Operationen 3, 2, 1, 0. Nur wenn  $q = 1$  war, genügten die Operationen 3, 2, 0, 0.

3 ausgezeichnete Funktionen	0
1 ausgezeichnete Funktion	2,0
früher, wenn $q = 1$	3,2,0,0
früher, wenn $q > 1$	3,2,1,0

Es ist sehr merkwürdig, dass es nicht schwieriger ist, drei fehlende als zwei fehlende Lösungen zu bestimmen.

3) Fehlen 4 Lösungen, so sind die folgenden Fälle möglich:

4 ausgezeichnete Funktionen	0
2 . . . . .	2,0
keine . . . . .	4,2,0
Früher, wenn $q = 1$	4,3,2,0,0
Früher, wenn $q > 1$	4,3,2,1,0

4) Fehlen 5 Lösungen, so sind die folgenden Fälle möglich

5 ausgezeichnete Funktionen	0
3 . . . . .	2,0
1 . . . . .	4,2,0
Früher, wenn $q = 1$	5,4,3,2,0,0
Früher, wenn $q > 1$	5,4,3,2,1,0

Die Bestimmung von 5 fehlenden Lösungen ist also nicht schwieriger als die Bestimmung von 4 fehlenden Lösungen.

5) Fehlen 6 Lösungen, so sind die folgenden Fälle möglich

6 ausgezeichnete Funktionen	0
4 . . . . .	2,0
2 . . . . .	4,2,0
Keine . . . . .	6,4,2,0
Früher, wenn $q = 1$	6,5,4,3,2,0,0
Früher, wenn $q > 1$	6,5,4,3,2,1,0

6) Fehlen 7 Lösungen, so sind die folgenden Fälle möglich

7 ausgezeichnete Funktionen	0
5 . . . . .	2,0
3 . . . . .	4,2,0
1 . . . . .	6,4,2,0
Früher, wenn $q = 1$	7,6,5,4,3,2,0,0
Früher, wenn $q > 1$	7,6,5,4,3,2,1,0

Man übersieht, dass man aus dem Theoreme II das folgende schöne Corollar ziehen kann

*Corollar. Die Bestimmung von  $2m+1$  fehlenden Lösungen des Systems*

$$(f_1 f) = 0 \dots (f_q f) = 0 \quad \text{wo } (f_i f_k) = 0$$

*verlangt nicht höhere Integrations-Operationen als diejenige von  $2m$  fehlenden Lösungen.*

Ich werde eine Anwendung des Theorems II auf die Mechanik machen. Hierdurch erreiche ich in einfachster möglicher Weise diejenigen Resultate, die sich aus *Mayers* und meinen Arbeiten in 1872, verbunden mit den früheren Untersuchungen über diesen Gegenstande ergaben.

Sei z. B.

$$f_1(x_1 \dots x_9, p_1 \dots p_9) = a$$

diejenige partielle Differential-Gleichung 1. O. auf die sich das allgemeine Problem dreier Körper zurückführen lässt. Seien ferner  $f_2 \dots f_9$  diejenigen Lösungen von  $(f_1 f) = 0$  die den Schwerpunkts-Integralen und den Flächensätzen entsprechen. Bildet man nun die Determinante, deren Elemente die  $(f_i f_k)$  sind, so erkennt man, dass die Gruppe der  $f_k$  ausser  $f_1$  noch zwei ausgezeichnete Funktionen enthält. Folglich schliessen wir unmittelbar aus unseren allgemeinen Theorien, dass die Integration der vorgelegten Gleichung nur noch die Operationen 6, 4, 2 verlangt.

In ganz entsprechender Weise behandelt man ein jedes mechanisches Problem, das sich auf eine partielle Differential-Gleichung 1. O. mit gewissen bekannten Lösungen reduciren lässt.

## § 5.

**Die entwickelten Theorien leisten das Grösstmögliche.**

In der Abhandlung «Discussion aller Integrations-Methoden»

habe ich gezeigt, dass die allgemeine Integration eines Systems partieller Differential-Gleichungen 1. O. sich nicht vermöge einfacherer Integrations-Operationen als nach den beiden Methoden, die *Mayer* und ich in 1872 entwickelten, leisten lässt. Doch beruht mein Beweis einerseits auf die beiden folgenden Axiome:

a) Die Integration der allgemeinen Gleichung  $f(xy \frac{dy}{dx}) = 0$

lässt sich nicht vermöge ausführbarer Operationen leisten.

b) Die einfachste Integrations-Methode der allgemeinen Gleichung  $f(x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n) = a$  *fängt an* mit der Bestimmung einer Lösung von einem vollständigen Systeme zwischen den Variablen  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$ , das zu  $f$  in einer durch Berührungs-Transformationen invarianter Beziehung steht,

andererseits auf die Voraussetzung, dass man nur eine Lösung eines jeden Hülfs-Systems findet.

Diese Theorie setze ich als bekannt voraus.

Wenn man dagegen, indem man die beiden aufgestellten Axiome festhält, die Voraussetzung macht, dass man zufälligerweise gleichzeitig mehrere Lösungen eines Hülfs-Systems findet, so stellt sich das neue Problem, das Eintreten eines solchen Umstandes möglichst viel zur Vereinfachung des zurückstehenden Integrations-Geschäfts zu verwerthen. Ich werde zeigen, dass diejenigen Theorien, die ich in meiner Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen und in dieser Abhandlung entwickelt habe, den grösstmöglichen Nutzen aus dem besprochenen Umstande ziehen lehren.

Lass mich zunächst voraussetzen, indem ich erinnere, dass jedes System partieller Differential-Gleichungen sich auf ein Involutions-System

$$X_1 = a_1 \dots X_q = a_q \quad (18)$$

reduciren lässt, dass die bekannten Lösungen des Systems  $(X, F) = 0$  eine Gruppe von der canonischen Form

$$X_1 \dots X_q \dots X_{q'} P_{q+1} \dots P_{q'} \quad (19)$$

bilden. Nach meiner allgemeinen Theorie, die für diesen einfachen Fall schon in meiner Invarianten-Theorie gegeben wurde, genügen jetzt die Operationen

$$2n - 2q', 2n - 2q' - 2 \dots 6, 4, 2 \quad (20)$$

zur Integration des vorgelegten Involutions-Systems. Ich behaupte, dass keine Methode sich mit einfacheren Integrations-Operationen begnügen kann.

Gäbe es in der That, eine solche bessere Methode, so könnte man dieselbe auf das allgemeine  $q$ -gliedrige Involutions-System

$$F_1 - \alpha_1 \dots F_q - \alpha_q \quad (21)$$

zwischen den Variablen  $x_1 \dots x_{n-q'+q} p_1 \dots p_{n-q'+q}$  anwenden. Obgleich nemlich die  $F$  nur die eben genannten Grössen enthält, so könnte man sie doch als Funktionen von  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$  auffassen. Dann aber müsste man die Grössen

$$F_1 \dots F_q x_{n-q'+q+1} \dots x_n p_{n-q'+q+1} \dots p_n,$$

die offenbar eine Gruppe der Form (19) bilden, als bekannte Lösungen des Systems  $(F_i \Phi) = 0$  betrachten. Vermöge der vermutheten besseren Integrations-Methode liesse sich also das System (21) durch einfachere Operationen als (20) erledigen. Da indess dies mit den Ergebnissen meiner «Discussion aller Integrations-Methoden» in Widerspruche steht, so giebt es keine bessere Integrations-Methode des Systems (18') als die in meiner Invarianten-Theorie entwickelte.

Jetzt erledigen wir den allgemeinen Fall, dass die dem vorgelegten Involutions-System

$$X_1 - \alpha_1 \dots X_q - \alpha_q$$

zugehörigen bekannten Lösungen des Systems  $(X_k F) = 0$  eine Gruppe von der allgemeinen canonischen Form

$$(22) \quad X_1 \dots X_q \dots X_{q'} \dots X_{q''} P_{q'+1} \dots P_{q''}$$

bilden. Konnte man nun ausserdem solche weitere Lösungen

$P_{q+1} \dots P_q$ , dass  $X_1 \dots X_q$ ,  $P_{q+1} \dots P_q$  eine canonische Gruppe bildeten, so verlangte die Integration des vorgelegten Involutions-Systems, wie wir eben sahen, jedenfalls die Operationen  $2n - 2_q$ ,  $2n - 2_q - 2, \dots 6, 4, 2$ . Da nun aber die Integration, auch wenn nur die Lösungen (22) bekannt sind, durch die eben genannten Operationen geleistet werden kann, so ist es selbstverständlich, dass eine weitere Integrations-Erniedrigung unmöglich ist.

Also können wir das folgende wichtige Theorem aussprechen

*Theorem III. Findet man bei der Integration einer beliebigen Systems partieller Differential-Gleichungen 1. O. gleichzeitig mehrere Lösungen eines Hülfs-Systems, so erlauben die in dieser Abhandlung und in meiner Invarianten-Theorie der Berührungstransformationen entwickelten Theorien den grösstmöglichen Nutzen aus den gefundenen Lösungen zu ziehen.*

Dieses Theorem ist doch nur als bewiesen zu betrachten, wenn man die beiden im Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Axiome admittirt.

## § 6.

### Partielle Differential-Gleichungen 1. O., welche die unbekannte Funktion enthalten.

Um nun die vorangehenden Theorien auf Gleichungen, welche die unbekannte Funktion explicite enthalten, auszu-dehnen, brauchen wir nur die betreffenden Gleichungen wie gewöhnlich auf die Form

$$F(x_1 \dots x_n \frac{p_1}{p_n} \dots \frac{p_{n-1}}{p_n}) = a$$

zu bringen. Hierbei tritt unter Umständen die Vereinfachung ein, dass die früher besprochene Quadratur wegfällt, indem



das betreffende Integral gleich Null gesetzt werden kann. Dies soll jetzt gezeigt werden.

**Satz 4.** Sind  $N_1 \dots N_r$   $H$  homogene Funktionen bez. nullter und erster Ordnung, die eine Gruppe von der canonicischen Form  $X_1 \dots X_n P_1 \dots P_m$  bilden, so besteht eine Relation

$$\sum p dx = K_1 dN_1 + \dots + K_r dN_r + dU,$$

in welcher  $U$  eine arbiträre Funktion von  $N_1 \dots N_r$  bezeichnet, so dass  $U$  insbesondere gleich Null gewählt werden kann.

Es sei nemlich  $X_1 \dots X_n P_1 \dots P_m$  die canonische Form unserer Gruppe und  $X_1 \dots X_n P_1 \dots P_n$  ein System canonicischer Variabeln. Alsdan ist bekanntlich

$$\sum p dx = \sum P dX$$

und wenn man hier die Grössen  $X_k$ , die von nullter Ordnung sind, als Funktionen von  $N_1 \dots N_r$  ausdrückt, so kommt eine Relation der Form

$$\sum p dx = \sum K dN,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist,

**Satz 5.** Sind  $N_1 \dots N_r$   $H$  homogene Funktionen bez. nullter und erster Ordnung, die eine Gruppe der canonischen Form  $X_1 \dots X_m P_1 \dots P_n$  bilden, so besteht, wenn  $m < n$  ist, niemals eine Relation der Form

$$\sum p dx = \sum K dN + dU.$$

**Beweis.** Es besteht, wissen wir, eine Relation

$$\sum p dx = \sum_1^m Q dX + \sum_1^n R dP + dU.$$

Um jetzt die Grössen  $Q_k$ ,  $R_k$  und  $U$  in einfachster Weise zu finden, wählen wir als neue homogene Variabeln  $X_1 \dots X_n P_1 \dots P_n$ . Da nun

$$\sum p dx = \sum P dX$$

ist, folgt

$$\sum P dX = \sum_1^m Q dX + \sum_1^n R dP + dU$$

woraus

$$P_k = Q_k + \frac{dU}{dX_k} \quad (k = 1 \dots m)$$

$$P_k = \frac{dU}{dX_k} \quad (k = m+1 \dots n)$$

$$0 = R_k + \frac{dU}{dP_k} \quad (k = 1 \dots n)$$

Durch Integration des zweiten Systems kommt

$$U = \sum_1 X_{m+1} P_{m+1} + V(P_1 \dots P_n X_1 \dots X_n);$$

und wenn man darnach die  $R_k$  bestimmt, findet man

$$\begin{aligned} \sum_1 R dP &= - \frac{dV}{dP_1} dP_1 - \dots - \frac{dV}{dP_m} dP_m \\ &\quad - \sum_1 (X_{m+1} + \frac{dV}{dP_{m+1}}) dP_{m+1} \end{aligned}$$

Es fragt sich, ob die linke Seite durch passenden Wahl der arbiträren Funktion  $V$  die Form

$$A_2 d\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \dots + A_n d\left(\frac{P_n}{P_1}\right)$$

oder ausgeführt

$$- \frac{\sum_1 A_k P_k}{P_1^2} dP_1 + \frac{A_2}{P_1} dP_2 + \dots + \frac{A_n}{P_1} dP_n$$

annehmen kann. Wäre dies möglich, käme

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dP_1} &= - \frac{\sum_1 A_k P_k}{P_1^2}, \quad \frac{dV}{dP_2} = - \frac{A_2}{P_1} \dots \frac{dV}{dP_m} = - \frac{A_m}{P_1} \\ X_{m+1} + \frac{dV}{dP_{m+1}} &= - \frac{A_{m+1}}{P_1} \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von  $A_2 \dots A_n$

$$\sum_1 P_k \frac{dV}{dP_k} = - \sum_{m+1} P_{m+1} X_{m+1}$$

folgen würde. Da nun aber die linke Seite gar keine unter den Grössen  $X_{m+1} \dots X_n$  enthält, so ist die gefundene Relation falsch, und also die betreffende Annahme unrichtig.

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

**Satz 6.** Sind  $N_1 \dots N_r$  Funktionen nullter Ordnung, die eine Relation der Form

$$\sum p dx - \sum K dN + dU$$

erfüllen, so ist  $U$  eine arbiträre Funktion der  $N$  und kann daher gleich Null gesetzt werden.

Sei  $N_1 \dots N_r \dots N_s, H$  die durch  $N_1 \dots N_r$  bestimmte homogene Gruppe, die nach Satz 3 entweder die Form  $X_1 \dots X_n P_1 \dots P_m$  oder  $X_1 \dots X_m P_1 \dots P_n$  besitzt. Wegen Satz 5 kann unsere Gruppe nicht die letzte Form haben. Also muss sie die erste Form besitzen. Dann aber zeigt Satz 4, dass  $U$  gleich Null gesetzt werden kann.

**Theorem IV.** Ist ein Involutions-System nullter Ordnung

$$N_1 = a_1 \dots N_q = a_q$$

zur Integration vorgelegt, und kennt man unter den Lösungen nullter Ordnung des Systems

$$(23) \quad (N_1 N) = 0 \dots (N_q N) = 0$$

eine so grosse Anzahl  $N_{q+1} \dots N_r$ , dass eine Relation der Form

$$\sum p dx - \sum K dN + dU$$

und also auch eine Relation der einfacheren Form

$$\sum p dx - \sum K dN$$

stattfindet, so verlangt die Integration des vorgelegten Involutions-Systems nur gewisse Differentiationen und Eliminationen, dagegen keine Quadratur.

**Beweis.** Nach Satz 2 sind  $K_{q+1} \dots K_r$  die fehlenden Lösungen des Systems (23). Um nun zweckmässige Ausdrücke der  $K$  zu finden, wählen wir  $2n-r$  Grössen  $u_1 \dots u_{2n-r}$ , die homogen von erster Ordnung und dabei von den  $N$  unabhängig sind, und führen darnach die  $N$  und  $u$  als unabhän-

gige Variablen anstatt der  $xp$  ein. Alsdann erkennt man, dass die  $K_\alpha$ , die durch die Formel

$$K_\alpha = \sum_k p_k \frac{dx_k}{dN_\alpha}$$

dargestellt sind, homogen von erster Ordnung sind. In Folge dessen sind die Verhältnisse der Grössen  $K_{q+1} \dots K_r$  die fehlenden Lösungen nullter Ordnung des Systems (23). Da nun diese Lösungen ohne Quadratur gefunden sind, so verlangt also wirklich die Integration des Involutions-Systems  $N_1 = \alpha_1 \dots N_q = \alpha_q$  nur Differentiationen und Eliminationen.

*Corollar.* Soll das Involutions-System nullter Ordnung  $N_1 = \alpha_1 \dots N_q = \alpha_q$  integrirt werden, so giebt es, wenn eine Anzahl Lösungen des Systems

$$(N_1 N) = 0 \dots (N_q N) = 0, \sum p \frac{dN}{dp} = 0$$

etwa  $N_{q+1} \dots N_r$  gefunden sind, zwei distinkte Fälle, in denen die Integration geleistet werden kann. Besitzt die von  $N_1 \dots N_r$  erzeugte homogene Gruppe die canonische Form  $X_1 \dots X_n P_1 \dots P_m$ , so verlangt die Integration nicht einmal eine Quadratur sondern nur Differentiationen und Eliminationen. Hat sie dagegen die Form  $X_1 \dots X_m P_1 \dots P_n$ , so ist noch eine Quadratur erforderlich.

Auch bei der Anwendung der in Paragraph 4 entwickelten Theorie auf Involutions-Systeme nullter Ordnung giebt es ausgezeichnete Fälle, die eine weitere Integrations-Erniedrigung gestatten.

Sei

$$N_1 = \alpha_1 \dots N_q = \alpha_q$$

das vorgelegte Involutions-System und seien  $N_1 \dots N_r, H$  bekannte Lösungen des Systems

$$(N_1 \Phi) = 0 \dots (N_q \Phi) = 0,$$

die eine Gruppe der canonicischen Form  $X_1 \dots X_q \dots X_{q'} \dots X_{q''} P_{q'+1} \dots P_{q''}$  bilden.

Ich bilde das vollständige System

$$(N_1 \Phi) = 0 \dots (N_r \Phi) = 0, (H \Phi) = 0, \sum p \frac{d\Phi}{dp} = 0$$

und führe anstatt der  $xp$  neue Variabeln ein, nemlich  $N_1 \dots N_r H$  zusammen mit gewissen weiteren Grössen  $u_1, u_2 \dots$ . Zwischen den hierdurch hervorgehenden Gleichungen eliminirt man die Differential-Quotienten von  $\Phi$  hinsichtlich  $N_1 \dots N_r$  und  $H$ , und findet so, wie man ohne grosse Schwierigkeit einsieht,  $q' + 1$  Gleichungen

$$U_{x_1} \frac{d\Phi}{du_1} + \dots + U_{x_{2n-2q''-q'}} \frac{d\Phi}{du_{2n-2q''-q'}} = 0,$$

die eo ipso ein vollständiges System bilden. Man bestimmt eine Lösung desselben vermöge einer Operation  $2n - 2q'' - 1$ . Diese Grösse steht in Involutions-Beziehung zu sämtlichen ausgezeichneten Funktionen unserer Gruppe.

Nun geht man weiter wie im Paragraph 4, und erhält dadurch ohne Schwierigkeit das folgende Theorem:

*Theorem V. Vorgelegt sei ein Involutions-System nullter Ordnung*

$$N_1 = \alpha_1 \dots N_q = \alpha_q$$

*und seien  $N_{q+1} \dots N_r H$  bekannte Lösungen des Systems*

$$(N_1 \Phi) = 0 \dots (N_q \Phi) = 0$$

*die eine Gruppe mit  $m$  ausgezeichneten Funktionen, sämtlich von nullter Ordnung bilden. Alsdann genügen zur Bestimmung der  $2l + m$  fehlenden Lösungen die Operationen*

$$2l-1, 2l-3, \dots 5, 3, 1$$

*Sind dagegen die  $m$  ausgezeichneten Funktionen nicht sämtlich von nullter Ordnung, so sind im*

*Allgemeinen die Operationen  $2l$ ,  $2l-2 \dots 6$ ,  $4$ ,  $2$  erforderlich.*

Zugefügt soll noch sein, dass dieses Theorem die grösstmögliche Integrations-Erniedrigung anbieht. Hierüber ausführlicher im zweiten Theile meiner «Allgemeine Theorie der partiellen Differential-Gleichungen 1. O.», die bald in «Mathematische Annalen» gedruckt werden wird.

---

# BIDRAG TIL DET NORDLIGE NORGES OROGRAFI.

AF

KARL PETTERSEN.

---

## Forord.

Stofmaterialet til efterstaaende skitse af Saltens Fogderi er væsentlig samlet under en sommeren 1875 foretaget geologisk undersøgelsesrejse inden de her omhandlede strøg. Naar undtages Wahlenbergs bekendte i 1807 udgivne skrift om Sulitelmatrakterne — en afhandling hvortil der her gjentagne gange er henvist — har jeg ikke haft at støtte mig til tidligere orografiske forarbejder herfra. Jeg skylder imidlertid et par lokal-kjendte mænd min forbindtlige tak for forskellige udfyldende meddelelser, de velvilligen have tilstillet mig for enkelte strøgs vedkommende, som jeg ikke fik anledning til nærmere at undersøge — nemlig for de ytre partier af Hammerø og Stegens præstegjelde.

Tromsø den 2den Marts 1876.

---

## Saltens Orografi.

I en tidligere offentliggjort afhandling «Tromsø amts Orografi» er der gjort et første forsøg paa en fremstilling af de orologiske forholde over strøget fra Kvæningen mod nord til Ofoten mod syd. I foreliggende afhandling skulle disse forholde blive forfulgte sydover i strøget fra Ofoten til Saltenfjord.

Sammenstiller man de her optrædende orografiske forholde med dem, der gjøre sig gjeldende inden Tromsø amt, saa vil der

i saa henseende strax stikke frem en væsentlig forskjel. Man savner nemlig her saagodtsom ganske de smale sundløb, der saa udpræget træder frem langs Vest-Finmarken og langs hele Tromsø amt. Fra Nordkap nedover til Fjelsundets udløb i Vestfjorden breder kyststrækningens øer sig i et bælte nært ind mod fastlandet, men bøjer her med engang ud i en stærkt afvigende syd-vestlig retning. Den milevid brede Vestfjord skjær sig her mere som en havarm end som en fjord ind mellem fastlandet og Lofotens øer. Fastlandets afslutning mod vest danner saaledes her det egentlige kyststrøg.

I orografisk henseende vil denne fastlandsstrækning kunne sondres i de to samme hovedgrupper som fastlandsstrækningen fra Ofoten nordover, nemlig:

A. Det egentlige Kjældrag.

B. Fjeldpartierne mellem Kjældraget og Vestfjorden.

#### A. Kjældraget.

Inden Tromsø amt er Kjældraget betegnet som en høj murvold, hvis vestlige afhæng er fulgt fra Kvænangen mod nord til Ofotens sidefjorde Harjangen og Rombaken mod syd. Langs den nordlige del af Tromsø amt stiger murvolden oftest op i stejle afsatser lige fra fjordlinjerne — saaledes langs hele den dybt indskaarne Lyngen-fjord. Over den sydligere del er derimod dragets vestlige afhæng i regelen at søge milevidt ind fra de egentlige sundløb og begrænses her af ejdefar og dalløb nemlig — i retningen fra nord mod syd: Balsfjordejdet, Tamok-elv, Maalselv, Bardoelv og Salangselv. Fra den øvre ende af Salangsdal skyder Kjældraget ned mod bunden af Gratangen i Ibostad præstegjeld og trækker sig herfra mod syd til Harjangen, her begrændset af Harjangejdet — ejdet mellem Gratangen og Harjangen.

Fra det samme rent orografiske udgangspunkt, som her er taget, vil ogsaa fra Ofoten mod syd til Saltenfjord kunne følges det vestlige afhæng af en hermed sammenhængende



murvold, der snart ved fjordløb snart ved ejdefar, som kuns hæve sig til 2 à 300 fod over havfladen, helt er udakilt fra de fjeldmasser, der skyde op over de vestenfor liggende halvøer, som naa frem til den egentlige kyst.

Imod det indre af Ofoten, i strøget fra Harjangen til Ballangen, naar Kjældraget lige ned til fjorden og afskjæres her mellem Ofoten og Etfjord af det lave Balangsejde. Fra Forsaavandet ved Balangsejdets afslutning mod Etfjord, skjær sig i sydøstlig retning et dalløb, der optager flere ferskvande, hvoraf det understliggende er Skod-vandet, med en højde over havfladen af 485 fod. Fra det indre af den egentlige Tysfjord — en sidefjord til den store fjord af samme navn — skjær en dyb men trang fjelddal sig ind i nordøstlig retning mod Skod-vandets dalføre. Disse fjelddale ere imidlertid adskilte ved en smalere, henimod 1800' høj fjeldryg, der skyder frem af Kjældraget. Saameget der end ved første øjekast kunde synes at tale til gunst for at benytte disse dalløb som grændselinjer for Kjældraget, lader dette sig dog ikke gjøre uden for stærkt at gjøre brud paa de her engang opstillede forudsætninger. Man nødes derfor hen til at føre det egentlige Kjældrag udover den smale udtungede halvø, der stiger op mellem Etfjord og Stedfjord. Kjældraget naar saaledes her frem lige til kystlinjen (Vestfjorden).

Fra Stedfjorden sydover breder Kjældraget sig ned langs den vestlige side af Tysfjorden og skyder her frem til fjordlinjen i de smaa halvøer mellem sidefjordene Tysfjord og Mandfjord, mellem Mandfjord og Grundfjord og mellem Grundfjord og Hellemofjord.

Imellem Tysfjord og Sagfjord afsluttes Kjældraget ved det lave Dragejde, følger herfra den østlige side af Sagfjord og fra bunden af samme langs Makvandets dybe og ret vide insænkning (ejde) ned til Mørkvikfjordens udmundning i Nordfolden. Herfra følger det Mørkesvikfjorden indover til samme bund, herfra langs det lave ejde, der optager Horndals- og Bonaa-

vandene ned til Lørfjord — en sidefjord til Sørfolden. Det stryger nu langs Sørfoldens indre løb og herfra videre over til Vattenbygden i Skjerstad sogn og skyder her frem til Skjerstadfjordens indre bund. I strøget mellem Sørfolden og Vattenbygden begrænses draget af det lave og brede Saltejde (eller Fiskejde).

Over hele dette strøg vil man saaledes finde et sammenhængende fjelddrag — tildels som en mere udpræget murvold med stejle fjeldvægge — at stige op dels umiddelbart fra fjordlinjerne, dels ogsaa fra lavt liggende ejdefar. Men paa et sted naaede draget ligetil kystlinjen. Disse ejdefar maa — hvad nærmere nedenfor skal søges paavist — gennem en af kvartærtidens tidligere afsnit antagelig have ligget under havfladen. Under dette tidsafsnit vil altsaa det her omhandlede fjelddrag gennem hele sin længde — et lidet kort stykke muligens fra regnet — have steget umiddelbart op fra havfladen og saaledes gennem paa hinanden følgende sundløb fuldstændig have været udskilt fra de langstrakte halvøer, der nu stige op mellem de dybt indskaarne fjordløb.

I «Tromsø amts Orografi» er en murvold karakteriseret som et fjelddrag med en forherskende længderetning og med udprægede murvægge, der danne afhængt langs begge langsider, medens fjeldmassen oventil afsluttes i mer eller mindre fremtrædende højfladedannelser, eller ogsaa i sondrede toppe, men dog i det hele af indbyrdes jevn højde. En murvold kan saaledes vistnok falde ind under det almindelige begreb «fjeldkjæde» eller «kjædedrag». De noget ejendommelige forhold, hvorunder Kjældraget træder frem inden Tromsø amt, synes dog at kunne berettigge til en opstilling af dette under et eget navnebegreb.

I det forsøg, som her skal leveres paa en nærmere detaljeret beskrivelse af Kjældraget fra Ofoten sydover, skal begrebet murvold idetmindste foreløbig beholdes. Ved fremstillingens afslutning vil der da være anledning til med de foreliggende

data for øje nærmere at omhandle forholdene i sin helhed og derunder da ogsaa komme tilbage til spørgsmaalet om, under hvilken orografisk begrebsbetegnelse Kjældraget rettest skulde blive at henhøre.

For oversigtens skyld vil det under detaljbeskrivelsen vise sig nødvendigt at gruppere det vidstrakte fjelddrag i enkelte underafdelinger. En saadan ordning lader sig her vistnok ikke gennemføre saa naturligen som forholdene tillod det i strøgene nordenfor Ofoten. De saakaldte «aabne dalløb», der her paa en vis maade delte draget i en række ud fra hinanden sondrede fjeldpartier — saa de nærmest kunde være at sammenligne med en optrukket perlerad — mangler ganske inden Saltens Kjældrag. I orografisk henseende træder dette her ogsaa i virkeligheden helt anderledes frem som en eneste sammenhængende fjeldmasse. Imidlertid er der andre her fremtrædende forholde, som kunne lade sig benytte som udgangspunkt for en ret naturlig gruppering.

Det bør endvidere fremholdes at detaljbeskrivelsen af Saltens Kjældrag alene vil omfatte den del af samme, der ligger paa norsk side. Der vil vistnok blive anledning til nu og da at kaste et og andet strejfblik over paa svensk side — men altid dog blot saa ganske i forbigaaende. Undersøgelserne ere nemlig ikke strakte udover rigsgrænsen. Detaljbeskrivelsen vil saaledes ikke kunne omfatte den hele murvold saaledes som det lod sig gjøre i strøgene nordenfor Ofoten, hvor Kjældraget i regelen helt og holdent laa paa norsk side, Ufuldstændig som denne beskrivelse saaledes maa blive, vil den dog antagelig alligevel kunne bidrage til at kaste lys over forholdene i det store og tillige støtte senere mere omfattende undersøgelser, navnlig fra svensk side.

Ved at se hen til de geologiske bygningsforholde — forholde der oftest i saa høj grad indvirke paa landskabernes orografiske fremtræden — vil Saltens Kjældrag fra nord mod syd kunne sondres i 3 større hovedafdelinger. Den nordligste

afdeling breder sig frem fra Rombakken ned mod Mandfjord i Tysfjord og kan betegnes som «Ofotens og Tysfjordens drag». Det midtre parti strækker sig fra Mandfjorden ned mod bunden af Sørfolden og vil blive betegnet som «Sagelvdalens og Foldens drag». Det tredie og søndre parti skyder ned mod den saakaldte Vattenbygd i det indre af Salten og dannes af de vidstrakte højfjeldsmasser, fra hvilken Blaamanden og Almajalos ligesom ogsaa Sulitelmas mægtige fjeldgruppe stiger frem. (Dette tredie hovedparti kan betegnes som «Vattenbygdens drag»).

#### a. Ofotens og Tysfjordens fjelddrag.

Den forholdsvis største del af dette fjeldparti nemlig den, der udbreder sig fra Rombak til Sørskjomen og herfra langs Sørskjomelv til grændserøserne 254 og 255, har forfatteren heraf ikke haft anledning til personlig at befare. Disse strøg have imidlertid i sidste aar delvis været befarede af vejingeniører i anledning af et projekteret jernbaneanlæg over halvøen fra den bottniske bugt til isfri norsk havn. Af disses indberetninger vil der være saameget at laane at det idetmindste vil kunne tjene til foreløbig at kaste lys over forholdene her i det store.

Langs det indre af Ofoten skjær sig i retningen fra nord mod syd følgende fjordløb ind i draget:

1. Rombakken i lige vest-østlig retning gennem  $1\frac{1}{2}$  mils længde. Dens bund ligger neppe mer end  $\frac{3}{4}$  norsk mil fra rigsgrændsen eller vandskillet mellem den bottniske bugt og Vesterhavet. Med undtagelse af Hellemobotten — Tysfjordens inderste forgrening, der har omtrent samme afstand fra rigsgrændsen som Rombakbotten — vil Vesterhavet intetsteds naa saa langt ind mod rigsgrændsen som netop her.

Fra bunden af Rombakken skjær Hunddalselven sig efter et kort østligt løb i sydlig retning gennem en fjeld- dal langs den vestlige side af grændselinjen eller vandskil-

linjen mellem Norge og Sverig i strøget fra grændseres no. 267 til midt for og imellem res 265 og 264, hvor ind-sænkningen naar sit kulminationspunkt med 2720'. Herfra holder indsænkningen ned mod Skjomelv-vandet, der har afløb — fremdeles efter en med grændselinjen parallel løbende retning — ned til fjeldvandet Kjæno-Javre (2230' o. h.). Dette vand ligger lige ved rigegrændsen (res no. 263) og i nærheden af Sjangli kobberværk, der ligger paa svensk side. Kjæno Javre har gjennem Nordelven (Nord-dalselven) afløb ned til Skjomen.

2. Beisfjorden — trang og neppe en mil lang — skjær sig ind i vest-østlig retning. Fra bunden af samme skyder et dalleb ind i sydøstlig retning men taber sig snart i høj-fjeldet.

3. Skjomen med sine to forgreninger Nord- og Sør-Skjomen.

I Nord-Skjomen udmunder Elvegaardselv, der dannes af den førnævnte Nordelv, der kommer fra Kjæno-Javre samt af Sørølven, der flyder ned fra grændsestrøgene mod syd, og igjen dannes af tvende større hovedgrene. Den østligste af disse har sit udspring fra fjeldvande i nærheden af grændseres 259 (Ivarstenen) mens den vestlige har sine kilder i nærheden af Sør-skjomelvns udspring omkring grændseres no. 255. Denne sidste elv løber herfra i næsten lige syd-nordlig retning og falder ud i Sørskjomen.

Hele det store fjeldparti, der ligger mellem Rombakken og Skjomen og mod øst begrænses af Hunddalselvns dalføre og vasdraget ned mod Kjæno Javre samt mod syd af Elvegaards-elven med Norddalselven, danner et kuperet fjeldplateau af en gennemsnitlig højde, der vel kan sættes til omkring 3000'. Fra fjeldplateauet hæver sædrag og toppe sig op til adskilligt over 3000', enkelte vel endog til op imod 4000'. Men ogsaa her vil man med hensyn til de ydre formforholde finde det stive og masseagtige parret paa den samme forunderlige maade — som tilfældet oftere findes i strøget nordenfor Ofoten —

med den alpinske karakters finere og dristigere træk. Navnlig ud imod Ofoten og langs de fra samme indskydende fjordløb sees en række af ret karakteristiske alpetinder. En af de højeste blandt disse er Tetta — paa den mellem Rombakken og Beisfjorden fremspringende halvø. Den antages at skulle naa en højde af over 4000'. Som andre mærkelige fjeldtinder inden dette fjeldparti ere nævnte: Vomtinden ved Beisfjord og Kongsbaktind ved Skjomens udmunding.

Langs den østlige side af Hunddalen rejser sig det egentlige grændsedrag til en højde af maaske noget over 3000'. Det sænker sig i retningen nordover mod Nora-Javre (paa svensk side ved grændseres no. 267) mens det som et højt fjeldparti breder sig udover svensk grund langs den sydlige side af Nora-Javre's og Torne-træsk's vide højfjeldsindvirkning ned mod den sydlige side af Torne-træsk. Hvorledes fjelddraget her afsluttes nedover det nordlige Sveriges lavlandspartier kjendes ikke, — men der er i ethvert tilfælde megen sandsynlighed for at overgangen her ikke foregaar gennem mere udprægede murvægge, men derimod snarere gennem mere jævnt og langsomt skraanende afheld.

Kulminationspunktet ved rigsgrændsen i lige østlig retning for Rombakbotten ligger i en højde over havfladen af omkring 2000'. Fra rigsgrændsen skraaner fjeldmassen her langsomt ned mod Tornedalens vide højfjeldsindsenkning, i hvis øverste afslutning mod rigsgrændsen det nysnævnte Nora-Javre ligger i en højde over havfladen af 1278'. Nora-Javre har afløb til Tornetræsk (1112)<sup>1)</sup>. Denne i flere henseender saa mærkelige højfjeldsindsenkning danner den øverste afslutning for Torne-elvens dalføre, der skildres som det af naturen rigest udstyrede strøg inden det nordlige Sverige.

Fra den øvre del af Hunddalselvens dalføre, hvor dalbunden har naaet op til en højde af 1410' over havfladen fører

---

<sup>1)</sup> 1175 sv. f. (Millrath).

et fjeldpas transversalt over til Vassi-Javre paa svensk side lige ved rigsgrænsen. Kulminationspunktet ligger her 2082' o. h. Vassi-Javre, der ligger paa det nærmeste i samme højde, har afløb til Nora-Javre.

I det her omhandlede fjeldparti er altsaa pas højden bestemt ved 3 forskjellige punkter nemlig:

lige vestenfor Nora-Javre	2000' (omtrentlig)
ved Vassi-Javre . . . .	2082'
Sjangli . . . . .	2230'.

Pas højden synes saaledes her stadigt aftagende efter retning fra syd mod nord. Den midlere pas højde bliver saaledes over dette strøg omkring 2100'. Den største top højde er ikke bestemt men vil antagelig naa lidt over 4000'. Den midlere top højde naar neppe højere end 3500' og maaske ikke engang saa højt. Forholdet mellem den midlere top højde og den midlere pas højde kommer saaledes sandsynligvis at ligge mellem forholds-  
exponenterne 1,7 og 1,5 som grændseverdier.

Den del af draget, der skyder op søndenfor Nordelven og det ovennævnte Sjangli-pas og mod vest begrænses af Sørskjomelven, er ikke befaret. Efter al sandsynlighed danner det et med det foregaaende i højde og ydre formforholde forøvrigt i det væsentlige helt ensartet fjeldparti. Den førnævnte Sørðalselv gennemkrydser fjeldmassen i syd-nordlig retning. De forskjellige højfjeldspasser, der fra dette fører over rigsgrænsen saavel i østlig retning mellem grændseresene no. 262 og 269 (Ivarstenen) som i sydlig retning over den øst-vestlige afbøjning, som rigsgrænsen her gjør mellem no. 259 og 255, maa efter al sandsynlighed have en højde over havfladen, der vil nogenlunde svare til Sjanglipassets højde 2230' og i ethvert tilfælde skal den neppe findes at gaa under denne.

Blandt mere mærkelige toppe inden dette fjeldparti er nævnt Kilinaliti (Trutentind) mod Norddalen.

Det vestenfor Sørskjomelven liggende parti af draget skyder udefter langs Skjomens vestlige side, hvor det stiger op i fjeld-

toppe af mellem 3 à 4000 fods højde og stryger herfra langs Ofotens sydside indtil det her afgrænsedes af den lille sidefjord Balangen samt Balangsejdet. Det anseelige 312' o. h. liggende Børsvand med afløb mod Etfjord skyder paa det nærmeste fra ejdets kulmination i sydøstlig retning ind i Kjældraget henimod den øvre ende af Storvand, der gennem Ronelv — mellem Skjomen og Balangen — har afløb til Ofoten. Stor-Ballangsfjeld (eller Setmo Varre) danner den højeste top paa det mellem Storvand og Børsvandet halvformige fremspring af Kjældraget. Fra den østlige side af Ronelv rejser sig Rontind til en højde af antagelig henimod 4000'.

Kjældragets egentlige mere sammenhængende højfjeldspartier dannes af den del, der stiger op langs Sørskjomelven og herfra i et temmelig bredt bælte trækker sig sydefter som et højt snedækket fjelddrag. Fra bunden af den lille Tysfjord — sidefjord til den store Tysfjord — skyder en trang fjelddal sig omkring 1 mil i nordøstlig retning og afslutter derpaa under en sydøstlig afbøjning i et omkring 2000' højt liggende fjeldskar, der fører over til Sitas-Javre paa svensk side lige ved rigsgrænsen (grænsenø no. 353). Dette fjeldpar, der saaledes ligger dybt under snegrænsen, deler det nævnte snedækkede fjelddrag i to hoveddele — et større nordligt og et mindre sydparti.

Det var omkring midten af august maaned at jeg fra den lille Tysfjords indre bund — indenfor Strømmen — foretog en eksursion op til snefjeldets sydparti. Fjeldlapperne vare uheldigvis netop flyttede østover fra Tysfjorden og det var saaledes umuligt at opdrive en lappisk vejviser. Opstigningen fra fjorden gik efter en lappisk flytvej, der gennem mangfoldige bugtninger førte op efter de stejle, tildels med frodig birkeskov bevoxede murvægge. Birkegrænsen bestemtes her til 1443' o. h. Fra den øvre kant af denne murvæg — omkring 2300' o. h. — bredte sig en af fjeldindsænkninger og dalindskjæringer gennemsat fjeldmark op mod snefjeldet. Fra en højde af omkring



2500' begyndte dette at stige op i stejlere afsats, hyppig dækket af større og mindre snemasser. Sneen var her oftest saa haard at det var vanskeligt at finde fodfæste og paa forskjellige steder maatte man tildels ad betydelige omveje omgaa disse stejlt-stigende sneflader. Ved en højde af omkring 3700' afsluttedes det egentlige afhæng og herfra førte sagtere skraaninger, overdækkede med sammenhængende blødere snemasser — fra hvilke den faste fjeldgrund dog paa enkelte punkter kunde findes stikkende frem — op mod dragets højeste punkt 4580' o. h. lige ved dets sydlige afsluttende afhæng. Det var en vid og storartet udsigt fra dette punkt. Mod nord strakte draget sig indtil afhængt af det førnævnte fjeldpas, fra hvis anden side vide snemarker igjen saaes skydende frem. Strax ved den østlige side af snefjeldet skar dybe fjeldkløfter sig ned og vilde sønderrevne fjeldpartier og isolerede toppe rejste sig her, dækkede med sne og tildels vel ogsaa med is. Mod syd faldt snefjeldet ned mod lavere liggende, kuperede fjeldmarker og længst imod syd eller sydvest til vest begrænsedes udsigten ved en uendelighed af ofte fint formede alpetinder, der steg frem dels over det egentlige indland, dels over de udenfor liggende halvøddannelser om Sagfjord og Tysfjord. Det var bidende koldt op paa højfjeldet, termometret stod neppe mer end et par grader C. over fryspunktet, en tæt skodde begyndte fra vest af at trænge sig frem over højfjeldet og manede os til snarligt opbrud.

Det lappiske navn paa den her omhandlede fjeldhøjde kan ikke opgives. Den vil indtil videre blive betegnet under navnet af «Tysfjordens snefjeld». Den ligger antagelig midt imellem fjordbunden og rigegrænsen, maaske dog nærmere den sidste.

Tysfjordens snefjeld, der som nævnt stiger op til 4680', er det højeste nu kjendte punkt inden Kjældraget fra Rombakken ned til Tysfjord. I strøget sydover vil der paa norsk side ikke være at paaavise noget saa højt liggende punkt forinden man naar ned mod Sulitelmas fjeldgruppe.

Det nordenfor Sitas-passet liggende snefjeldsdrag er ikke nærmere undersøgt, men der er paa forhaand al sandsynlighed for at forholdene der i det væsentlige ville findes nogenlunde ensartede med de her omhandlede.

Forholdene paa svensk side fra grændsestrøgene østover ere kun for lidet kjendte. Ved imidlertid at se hen til et af C. Gust. Millrath i 1873 udgivet kart over svensk Norrland er der sandsynlighed for at Kjeldraget fremdeles med en betydelig om end maaske stadig aftagende højde breder sig ud en 7 à 8 norske mil i østlig eller sydøstlig retning, hvor det med langsomt afhæld falder ned mod de lavere, maaske indtil 16 à 1700' højtliggende fjeldmarker, langs nordre side af Store Luletræsk. Sita-Javre og Pauro-Javre, der ligge lige ved rigsgrændsen i omkring 2000' højt liggende fjeldpasser og indelukte mellem høje fjeldvægge, have gennem en række sammenhængende fjeldvande, efter 7 à 8 miles længde, udløb til det omtrent 1330' o. h. liggende Storva-Javre, der atter gennem et mils drag flyder sammen med Luletræsk (1210' Millr.). Grændsefjeldene i et flere miles bredt bælte paa svensk side maa saaledes her antagelig naa en gennemsnitlig højde af op imod 3000'.

Fra den vestlige side af det førnævnte dalføre, der munder ud i Tysfjord, rejser sig et vildt, i høj grad sanderrevet fjeldparti, der breder sig ud imod bundene af Stedfjord og Etfjord og herfra videre skyder ud i den langstrakte lavere halv, der skiller mellem de to nævnte fjorde. Fra Tysfjordens bund hæver Strømsfjeld og Forhougtinden sig op til en højde af mellem 3 à 4000 fod. Højdepunktet er den mægtige Stedtind, der fra bunden af Stedfjord i stejle, utilgængelige styrtninger rejser sig op til en højde af sikkerlig 4000'. Fjeldpartierne om bunden af Stedfjord og Etfjord ere byggede af haard granitisk gneis (kyststrækningens gneis-granit) og fra Stedtind indtil bunden af Etfjord taarner sig op en række af fjeldtinder — hvorimellem Kobtind og Tauselvtind — med de for kystens

gneisgranit ofte saa karakteristiske former. De ligge i række med Stedtinden langs den sydlige side af et omkring 1000' højt liggende fjeldakar, der fra bunden af Stedfjord skjær sig under Stedtinden over til gaarden Tauselv i Ebfjord.

Ved bunden af Stedfjord skraaner fjeldmassen ned mod et omkring 1000' højt stikkende skarp ryg — hvorover en særdeles vanakelig overgang mellem de omhandlede fjorde. Længere ud vestover stiger fra halvøen frem en række fjeldtinder, ogsaa her ofte med de for gneisgraniten saa ejendommelige former. Mellem disse kunne mærkes i rækken fra øst mod vest: Kobnes-tinderne, Lille-Tinden og Kuhornet. Disse toppe naa neppe højere op end omkring 2000'.

Fra bunden af Ebfjord langs dens nordlige eller nordøstlige side ud imod Forsaa rejser sig en lavere fjeldryg, der skiller mellem Ebfjord og det lille dalføre, der munder ud ved Forsaa, hvori det fornævnte Skodvand. Dette drag er ved et bredt skar skilt fra det højere fjeldparti om bunden, der her afsluttes ved Bottenfjeldet (1794'). Bottenfjeldet styrter ned mod den øvre ende af Skodvand (485') der gennem Melkvand har afløb til Forsaavand og derigennem til Ebfjord.

Paa den lille fremspringende halvø mellem den lille Tysfjord og Mandfjord naar Nestinden den største højde med omkring 3000'.

#### b. Sagelvdalens og Foldens drag.

Dette strækker sig med de forhen angivne grændselinjer fra Grundfjord mod nord til Ankilsvandene og Strømsvandet mod syd, idet det dog her i denne sin sydligste del skyder sig i en smal, omtrent 2 mil lang kile frem vestenfor Kjældragets tredje hovedparti (Sulitelmadraget). Denne afdeling er, alene med undtagelse af et smalere skiferbælte og nogle mindre skiferstriber om de indre sidefjorde til Sørfolden forøvrigt bygget af granit.

De fjord- og dalleb, der skjær sig ind i draget, ere i retningen fra nord mod syd:

1. Mandfjord, fra hvis nordre side den kegleformede Maltind stiger frem. Fra bunden af Mandfjord skjær Spotta-jak sig ind gennem en trang fjeldrevne, der indover snart afsluttes i et højtliggende fjeldpas, over hvilket rigsgrænsen er trukket i en højde af antagelig omkring 1800'.

Afstanden fra bunden af Mandfjord til rigsgrænsen er omkring  $1\frac{1}{2}$  mil.

2. Grundfjord med det fra samme indskjærende dalleb (Birkedal). Denne stiger efter et løb af en knap halv mil op til en højde af omkring 1000', herfra gennem den anden halv mil langsomt op med 3 à 400' og hæver sig herfra i raskere stigning op til vandskillet ved rigsgrænsen (1800'). Fra dette højfjeldsparti rejser sig lavere aarsækker, hvis højdepunkter neppe naa op imod 3000'.

Afstanden fra Grundfjordbotten! op til rigsgrænsen er omtrent  $1\frac{1}{2}$  mil.

3. Adskilt fra Grundfjorden ved en smal bjergryg skjær Hellemofjorden sig først i sydlig og derpaa med en sydostlig afbøjning ind i Kjeldraget og naar med sin inderste bund nærmere ind mod rigsgrænsen — eller vandskillet mellem den Bottniske bugt og Vesterhavet — end nogen anden af de nordlandske indfjorde (Rombakken alene fraregnet). Afstanden fra Hellemobotten til rigsgrænsen overstiger ikke 1 mil, men ligger snarere noget derunder.

Hellemofjorden danner et af landets goldeste fjordløb. Saa godtsom langs den hele linje stiger de granitiske fjeldvægge op i oftest utilgængelige styrtninger. Fjeldvæggene ere i regelen nøgne og alene hist og her sees en birk eller en vantreven furu at skyde op fra de sparsomt fordelte grus- eller jorddækte smaapletter. Fjeldtoppene her naa dog neppe højere op end til mellem 2 à 3000'.

Fra fjordbunden, hvor der først aabner sig et forholdsvis ret anseeligt underland, dannet af tildels med frodig furuskog bevoxede sandmoer, skjær en trang fjeldkløft gennem disse og ind i bjergmassen, men standses efter et kort løb af fjeldvæggene, der i stejle styrtninger fører op til vide af lave aasdrag omgivne højfjeldsindsænkninger, hvori vandskillet og rigsgrænsen her ere at søge. Fra et fjeldvand i denne indsækning er afløb til begge sider — saavel til norsk som til svensk side. Vandskillets højde over havfladen er 1786'. (Efter Suhrland 1872'.)

Lige ved rigsgrænsen rejser sig paa den sydlige side af fjeldindsækningen den anseelige Zhjorro-Zhjok sin kegleformige top op til en højde af antagelig omkring 3500', idet dens fjeldvægge vestover styrter ned mod den førnævnte fra Hellemobotten indskydende fjelddal eller fjeldkløft. Adskilt fra samme ved et bredere fjeldskar, der langsomt skraaner op fra vandskillet, stiger paa svensk side Rauto-oivve op til omtrent lignende højde. Lige ved rigsgrænsen afløses graniten af lagrækker af en krystallinisk skiferafdeling, der optræder i overlejningsforhold til graniten. Skiferen bygger her lave, mildt formede aasdrag, der fra grænsen kunne sees skydende langt ind over svensk grund, idet de stige op fra højfjeldsindsækningen, der her udvider sig mere og mere, og danne ret anseelige højfjeldsflader med en mod øst eller sydost næsten umærkelig sænkning. Paa norsk side er ret vækterlig fjeldbirk endnu at finde i nærheden af kulminationspunktet (birkegrænsen her barometrisk bestemt til 1715') og fra rigsgrænsen sees i en afstand af omkring  $\frac{1}{2}$  mil frodig birkeskog dække den omhandlede fjeldindsækning fra svensk side.

4. Fra den sydlige side af Hellemofjorden, netop hvor den sydøstlige afbøjning begynder, skjær Muskens dalføre eller skar sig ind i sydlig retning. Efter et kort løb gaar det over i en omkring 1000' højt liggende fjeldindsækning, der fører østenom den ejendommelig formede Kraakmotind (Bagat) over

mod Sagelvdalens øverste vand (7de vand). Ræk-vandet, der har afløb mod Sagelvdalens 4de vand nordenfor Ragat, ligger i dette fjeldpas.

Fra den vestlige side af Musken-skar rejser sig et i høj grad vildt fjeldparti, fra hvilket en række alpeformige tinder — Musktinderne og Lerviktinderne — stige frem. Dette parti, der er bygget af skifer, afløses strax nordenfor Lerviktinderne af en ny afdeling af Kjældragets granit, der bygger aasdrag, der langsomt skraaner ned mod det vide underland om det lave Dragejde. Musktinderne og Lerviktinderne naa en højde af antagelig mellem 2500 og 3000'.

5. Fra bunden af Sagfjord skjær den vide Sagelvedal sig ind i sydøstlig retning gennem en længdestrækning af henimod  $2\frac{1}{2}$  mil. En større del af den egentlige dalbund er udfyldt af en række af 7 paa hinanden følgende større og mindre ferskvande, der forbundne ved korte elvefar eller strømme danne et sammenhængende vadsdrag. Det øverste af disse, det 7de vand, ligger i en højde af 406' o. h. Sagelvdal er paa det nærmeste helt og holdent indskaaret i Kjældragets granit, der langs den sydlige side i strøget fra 6te vand op mod den indre bund af det 7de vand bygger et højt og vildt fjeldparti. Temmelig højt liggende fjeldakar fører herfra, det ene til Mørkesvikdalen ved Nordfolden, det andet fra øverenden af det 7de vand over til Gjerdalselven, der løber ned til Lørfjord i Sørfolden. Fra det 5te vand vestover aftager fjeldmassen i højde. Over et 1622' højt aasdrag kommer man fra Sagelvdalens 4de vand over til det brede Makejde, der begrænses Kjældraget i strøget fra Sagfjorbotten over til Nordfolden. Makvandet ligger paa ejdets kulmination 328' o. h. Sælhus-tinderne og de høje af skifer byggede Aanderbaktinder, der stige op mellem Mørkesvikfjord og Stopvandet, ved Makejdets afslutning mod Nordfolden, afslutte Kjældraget her. Aanderbaktinderne naa en højde af antagelig omkring 3000'.

Langs den nordøstlige side af Sagelvdalen hæver Kraakmo-

tinden sin mægtige masse fra overenden af 4de Vand og naar en højde af omkring 3000'. Kraakmotindens fjeldmasse skraaner efterhaanden ned mod den vestre ende af det 7de vand, ligesom ogsaa mod Rækvandets før nævnte fjeldpas.

Kraakmotinden (Ragat) stiger fra dalbunden op i nøgne, stejle og utilgængelige fjeldvægge ligetil top. Den kan fremholdes som en karakteristisk udpræget typus for en fjeldform, der oftere vil findes trædende frem inden denne her omhandlede granitiske afdeling af Kjældraget. Denne form er sammenlignet med formen af en saakaldet Skothue, med hvilken den ogsaa i virkeligheden har en ret slaaende lighed.

Sagelvdalen, der endnu ved overenden af 7de vand bevarer den samme, i forhold til dalførets længde anseelige brede, som udmærker den gennem det hele løb, standses her pludseligt ved de stejlt stigende vægge af et højt fjeldparti, der tilhører den førnævnte skiferzone, der fra Musken skjærer sig ind i kjølgraniten. Fra overenden af 7de vand skyder en trang fjeldkløft i østlig retning ind i fjeldmassen, men afsluttes efter et ganske kort løb i højfjeldet. Slunkelven, der kommer fra det 1600' højtliggende Slunkvand — hvilket ad den anden side ogsaa har afløb til Rækvandet — gennemstrømmer fjeldkløften og falder ud i 7de vand. Paa nordsiden af fjeldkløften rejser sig fjelddraget Slunka, der her skiller mellem Rækvandets og Slunkvandets indsænkninger, der forøvrigt nordenom Slunka gaa over i hinanden. Slunka bygger et langstrakt ensformigt drag, hvis højeste top naar op til omkring 2600'. Fra den sydlige side af kløften rejser sig Raska Zhiorro til omtrent lignende højde. Længs Slunkvandets østside stiger et langstrakt drag, der fører navn af Ajakoivve, i nordsydlig retning. Gjennem en trang fjeldspalte søndenom Ajakoivve naaes over snedækte skraaninger opover det egentlige højfjeld, hvis øverste top her naar op til en højde over havfladen af 3120'. Hele det her omhandlede strøg fra 7de vand op til øverste højfjeld er bygget af lagsrækker tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe,

medens graniten bryder frem i de dybere liggende partier over affaldet mod syd ned til Gjerdalselv. Fra højfjeldet her sees ned over den øvre del af den lige under liggende Gjerdal, om hvis øvre parti der reiser sig en række af granitiske kegleformige tinder — hvorimellem Herko-varre, antagelig det samme som paa Munchs kart er opført under navnet Kirko-varre. Østenom disse og begrænsende synskredsen her sees mildt formede blaanende aasdrag strækkende sig nordover — antagelig paa svensk side. Fra højfjeldets øverste punkt kan Gjerdalselven følges langt nedover og fra den sydlige side af samme rejser sig et mægtigt granitisk fjeldparti med toppe — hvoriblandt Gjerdalstind — af hvilke flere antagelig naa opover 3500' og maaske henimod 4000'. Hyppige gletschere sees her at skyde sig frem mellem fjeldskar og fjeldkløfter.

Sagelvdalen er saaledes indad saa ganske lukket af det egentlige højfjeld, at der end ikke er at paavise noget højere liggende fjeldpas, igjennem hvilket man herfra skulde kunne naa ind over rigsgrænsen eller til vandskillet mellem Østersøen og Vesterhavet.

6. Fra bunden af Nordfoldens indre del, den saakaldte Mørkesvikfjord, skjær sig intet større dalføre ind gjennem Kjældraget, men derimod et par kortere fjeldspalter. Den ene af disse er Mørkesvikdal med Mørkvandene — hvorfra som før nævnt et højere fjeldpas fører over til Sagvandene.

Fra den sydlige side af Mørkesvikfjordens bund fører et ejde over til Lerfjord i Sørfolden. Omtrent midt paa ejdet ligger Horndalsvandet i en højde af 268' med afløb til Lerfjord gjennem Bonaavandet. Ejdet kulmination (430' o. h.) dannes af en lav aas mellem Horndalsvandet og Mørkesvikfjord. Dette ejde danner — som før nævnt — Kjældragets grænsse mellem Mørkesvikfjord og Lerfjord.

Om bunden af Mørkesvikfjorden bygger graniten en række af nøgne kuppeformige toppe og aasdrag. De højeste toppe her naa neppe synderlig højere end omkring 2000'. Først ned



imod Lerfjord rejser sig et vildt fjeldparti, fra hvilket den mægtige Korko-Zhjok hæver sig til antagelig adskilligt over 4000' (Wahlenberg). Korko-Zhjok danner rimeligvis det højeste punkt inden den her omhandlede afdeling af Kjeldraget.

7. Fra bunden af Lerfjord skjær den omkring 2 mil lange Gjerdal sig ind i østnordostlig retning og afsluttes op imod det vilde fjeldparti i nærheden af det ovenfor omhandlede højfjeld østenom Ajak-oivve. Fra bunden af Gjerdal er der — rimeligvis gennem højere liggende fjeldpas — overgang til et elvedrag, der har sit udspring ved rigsgrænsen i nærheden af grændseres no. 247 og som i et nordligt til nordvestligt løb af omkring 2 mil falder ud i Hellemobotten i Tysfjord.

Fra Sørfjordbotten i Lerfjord stiger landet strax i stejle afsatser op til et belgefornigt, af aasdrag gennemsat, langsomt stigende højfjeldsplateau. Over dette naaes til det 2300' højtliggende Gukkis-Javre (Langvand) lige ved rigsgrænsen (grændseres no. 243). Gukkis-Javre ligger i et fjeldpas, der mod øst holder ned til det paa svensk side strax ved grænsen liggende anseelige fjeldvand Vastin-Javre (efter Wahl. 1759'). Gukkis-Javre har afløb i lige vestlig retning og dette skjær sig her snart ned i en dyb dalfure og falder under navn af Veitelv eller Østerelv ud i Kobvandet, der fra sin nordlige side ogsaa optager den førnævnte Gjerdalselv. Mellem Østerelven og Gjerdalselv rejser sig det under (5) nævnte granitiske fjeldparti med sine nøgne stejle vægge. De højeste punkter inden dette ere Kviturtind samt Gjertind, hvilke antagelig naar en højde af omkring 3500' (eller maaake op imod 4000').

Lige ved rigsgrænsen hæver sig fra den sydlige side af Gukkis-Javre, Store Gautilus op til en højde af omkring 3500' eller maaake op imod 4000'. Mod syd udbreder det fra 1800 til omkring 2000' høje fjeldplateau sig over anseelige vidder, og først i en afstand af omkring 1 mil sees en højere liggende fjeldmasse, der fører op mod Tulpajegnas vldstrakte snemarker.

Langt indover svensk side sees fra rigsgrænsen forskellige

høje, tildels spidse alpetinder. Mellem disse antagelig ogsaa Alkavarre — 1 à 2 mil nordost for Vasten-Javre. Alkavarre er efter Wahlberg 4916'.

7. Fra det indre af Sørfolden skjær de to smaa sidefjorde — Nordfjord og Tørfjord — sig fra en fælles udmunding ind igjennem Kjældraget.

Fra den fælles udmunding fører en smal, men bugtet rende mellem lodrette vægge ind til den egentlige Nordfjord. Stor-skogelvsnen dalføre, der ved elvens udmunding i Nordfjord danner ret anseelige flader, fører omkring  $1\frac{1}{2}$  mil indover i østlig retning. Dalføret indover har jeg ikke haft anledning til at befare, men naturen her skildres som storartet vild. Elvedraget skjær sig ind gennem det under (6) omhandlede fjeldplateau og afsluttes i højfjeldet ind mod rigsgrænsen. Hvorvidt der fra dalbunden her fører sendenom det før nævnte Store Gautilus et dybere indskaaret højfjeldspas over vandskillet til siget ned mod Vastin-Javre paa svensk side skal ikke kunne siges. I henhold til saavel mundtlige beretninger om forholdene her, som til Wahlenbergs beskrivelse, er dalføret lukket ved en mellem 3400 og 3800' højt liggende fjeldryg, der fra Store Gautilus skyder sydover langs rigsgrænsen.

Fra bunden af Tørfjord skjær en dyb og temmelig vid fjeldrevne sig ind i den høje granitiske fjeldgrund gennem  $\frac{1}{2}$  miles længde. Bunden af denne revne er paa det nærmeste udfyldt af Nedre- og Øvre-Ankilvand. Nedre vand styrter gennem et omtrent 20' højt fald ud i Tørfjorden, mens en kort strøm af nogle faa fods fald forbinder Ankilvandene. Strøm ved den nedre ende af Nedre vand bryder graniten frem fra de mod samme lænede, næsten lodretstaaende lagrækker af Tromsø glimmerskifergruppe og rejser herfra langs vandene indover paa begge sider sine stejle, nøgne, utilgængelige fjeldvægge saagodtsom i et eneste sæt op til en højde af omkring 2000'. Fra den vestre side af Nedre vand stiger Strømsklumpen (Ravat Zhjokko) op til en højde af 2772' (Wahlenberg).

Fra den østlige side stiger Lappefjeldet op. Fra dettes øvre omkring 2000' høje markant naar man gennem langsommere stigning ind over den omkring (noget over) 3000' højt liggende snedækte fjeldmark <sup>1)</sup> med Tulpajegnas anseelige gletscher langs afhængt mod fjeldvandet Passe-Javre, der har afløb nordefter mod den førnævnte Storskogselv. En nøgen klippe, Pådnak, der gjennembryder Tulpajegnas gletscher, naar efter Wahlenberg en højde af 3370'. Tulpajegnas ismasser skyder sig ned over det nordlige, sagte akraanende afhæng af et omkring 3900' højt snefjeld, der stiger op fra en strax søndenfor liggende fjelddal eller fjeldspalte, der fra Øvre Ankelvand forbi Sita-Javre fører over rigsgrænsen til den paa svensk side, nært ved grænsen liggende store fjeldsø Wirik-Javre (1850' o. h., Wahlberg). Grændseres no. 241 ligger (efter W.) i en højde af 2770' og danner kulminationspunktet over dette pas. Fjeldalen forbi Sita-Javre er vanskelig at befare. Den almindelige fjeldovergang fra Tørfjord til Wirik-Javre lægges derfor fra Nedre Ankelvand over Lappefjeld og Tulpajegna med Pådnak som kulminationspunkt ned til grændseres no. 241.

Ved den øvre ende af det Øvre Ankelvand stiger Sisoktinden med sine nøgne granitiske vægge i næsten lodrette styrtninger op til en højde af omkring 3000'. Den øverste brem af fjeldet er dannet af en lagrække af krystallinisk skifer. Allerede nede fra vandet kan man se denne skiferafdeling, hvis lag falder indover med østligt fald, efter en skarp betegnet grændselinje overleje den granitiske hovedmasse. Det samme forhold træder ogsaa frem over Lappefjeldets øverste markant.

Sisoktinden danner en fjeldform ganske analog med den førnævnte Kraakmotind.

Den tidligere nævnte Strømsklump falder ned mod syd og afsluttes her i en 867' høj smal granitisk ryg, der skiller mellem

<sup>1)</sup> Disse højfjeldsmarker hører egentlig ind under Kjeldragets sydparti, men omhandles her, da de paa det nøjeste ere knyttede til den granitiske vestrand, der kileformig skyder sig om Ankelvandene.

Øvre Ankelvand paa den ene og Strøms- og Rørvandets indsenkning paa den anden side. Denne ryg stiger ved øverenden af Øvre Ankelvand op i den 3497' fod høje Pilekoptind (Mid-dagsfjeld) — mellem Ankelvand og Rørvand — og danner det højeste punkt inden Kjeldragets vestlige afhæng over dette strøg.

Pilekoptind er opover sit vestlige afhæng fra fod næsten op imod top bygget af granit. Men ogsaa her overlejes graniten — ligesom tilfældet var ved Sisoktind og Lappefjeldet — over sin øverste afdeling af lagrækker af mod øst faldende skiferstrata (glimmerskifer og kvartsitisk skifer), der fra nu af optræder eneraadende over de vide højfjeldsmarker, der udbreder sig fra Pilekoptind østover. Imellem Sisoktind og Pilekoptind lukkes Ankilvandets dalspalte ved en omtrent 850' høj fjeldvæg. Fra denne fører den førnævnte fjelddal med Sita-Javre i en buet linje op imod grændseres no. 241.

Fra toppen af Pilekoptind have en vid og storartet udsigt over højfjeldet indad, som ogsaa over strøgene ud imod kysten. Indover udbreder sig det gennemsnitlig omkring eller noget over 3000' høje bølgeformige højplateau med sine anseelige snemarker. I nærheden rejser sig Blaamanden med sin sne-dækte top, hvorfra gletschere skyde ned saavel mod Norddalen, der skjær sig ind fra Vattenbygden, som mod Sita-Javre. Østenom Blaamanden sees over Linajeknas sne og ismarker — lige ved rigsgrændsen — den 5380' høje<sup>1)</sup> Ålmajalos, fra hvilken mægtige gletschere skyde ned, navnlig paa svensk side. Og i lige sydøstlig retning — i en afstand af mellem 3 à 4 mil — rejser sig fra højfjeldet Sulitelmagruppen, mellem hvis tinder navnlig den lige ved rigsgrændsen liggende 6000' høje nordre Sulitelma top udmærker sig ved en sjelden renhed og finhed i sine ydre former. Disse fra højfjeldet højt opragende toppe, ligesom ogsaa flere sikkerlig op imod 5000' høje tinder, der skyde op ind paa svensk side i grændsestrøgene om Väst-

---

<sup>1)</sup> Wahlenberg.

Javre danne her en imponerende baggrund. Men ligesaa stort og end mere afvekslingsrigt er det landskab, der breder sig ud mod vest. Over de forholdsvis lave fjeldpartier, der omgive de indre og midtre partier af Skjærstadvord og Folden, sees ud imod fjordaabningerne høje, vilde og mægtige fjeldmasser rage i vejret med en række af tildels forunderlig formede tinder. Mellem disse kan navnlig mærkes Kaarsviktind, Sjunktinderne, Skejstind og Strandtinderne langs Foldens sydlige side, samt Rørstadvind paa den nordlige side over Rørstadv kirke.

### c. Vattenbygdens drag.

Denne afdeling udbreder sig mod syd ned til den saakaldte Vattenbygd — saalangt er Kjeldraget fulgt. De ovenfor omhandlede, tildels snedækte højfjeldsmarker, der brede sig ud østnom Ankilvandet og som i orografisk henseende ikke godt kunne skilles ud fra den granitiske vestrund, ligge ind under denne hovedafdeling.

Vattenbygden skjær sig i østydostlig retning ind gennem Kjeldraget fra Fuske ved Skjærstadvordens nordre side gennem en længde af omkring 3 mil. Dalbunden optages for største delen af 3 større vande, nemlig:

1. Nedrevand, der ved en faa favne lang, ved højvande med baad passabel strøm er skilt fra Skjærstadvorden.
2. Øvrevand, ved en kort passabel strøm forbundet med Nedrevand. Nordalselv, der har sit udspring fra et 587' højt liggende vand lige under foden af den førnævnte Blaamand og som gennemløber den omkring 1 mil lange, ret brede Norddal, falder ud i Øvrevand ved sammes nordlige side. Paa begge sider Norddalen opover stiger fjeldmassen i regelen op i stejle styrtninger, men afsluttes opad, navnlig langs den vestlige og nordvestlige side i forskellige tinder, saaledes Rødtind og Hekkeltind, Blaamanden og Kjærningen. Gennem de mellem disse liggende skar naar

man snart op til det før omhandlede højfjeldsplateau østenom Pilekoptind. Norddalen lukkes af Blaamanden, der ogsaa her skyder ret anseelige gletscherbaand ned mod dalen. Blaamandens mægtige sne- og ismasser skulle kunne sees lige til Røst i Lofoten.<sup>1)</sup>

Øvrevand ligger 10 a 12 fod over havfladen. Fra den øvre ende af vandet hæver dalbunden sig temmelig raskt. Da elvefaret fra Langvandet gennem dalen til Øvrevand bryder sig frem gennem dybe kløfter, maa man her for at naa op til Langvandet stige over en 880' o. h. stigende aasryg. Langvandet ligger omkring  $\frac{1}{2}$  mils vej ovenfor Øvrevand og i en højde over havfladen af 362' (W.).<sup>2)</sup>

Langvandet er lukket ved dets indre ende og alene fra dets sydlige side sees en dybere indsænkning, der dog snart i stejlere afsatser fører sydover op til højfjeldsvandet Balvand. Fra Langvandets indre afslutning stiger man op over de temmelig stejle fjeldvægge, naar herfra over et bølgeformigt plateau til højfjeldsvandet Lommi-Javre der, efter Wahlenberg, ligger 2197' o. h. (efter min maaling 2227', der med fradrag af den i noten omtalte differentse for Langvandets vedkommende ganske falder sammen med W.s). Lommi-Javre, der har afløb til Langvandet, skyder frem i østlig retning lige til rigsgrænsen og er ved en smal lav aasryg adskilt fra det paa svensk side liggende fjeldvand Pieske-Javre (1730' Millr.). Vandskillet

<sup>1)</sup> Wahlenberg omtaler i sit før nævnte skrift, «at Norddalselven hvert 7de aar skal svulme saa stærkt op at den fylder saavel Øvre- som Nedrevand til en betydelig højde over den sædvanlige vandstand. Stigningen foregaar pludselig og især ved vinterens begyndelse.» Nu skal dog 40 aar være gaaet hen siden den sidste opsvulmen. — Blaamanden kaldes af befolkningen i Skjærstad «Kornmanden» efter en om sommeren snebar plet, som, naar den bliver stor, antager formen af en mand med en børre paa ryggen. Eftersom Kornmanden tidlig paa sommeren viser sig større eller mindre, venter man sig et rigere eller slettere kornaar.

<sup>2)</sup> Min maaling angav en højde af 892', hvortil dog skal bemærkes, at vejret ikke var gunstigt for højdebestemmelse med barometer.

mellem Lommi- og Pieske-Javre er omkring 2300'. Endnu den 7de Juli var Lommi-Javre islagt.

Fra Lommi-Javres nordvestlige side og umiddelbart fra vandets bred rejser sig et mægtigt kjededrag med en række af højtragende tinder. Dette drag, der spænder sig frem over højfjeldet fra Lommi-Javre i nordvestlig retning indover rigsgrænsen, er det fra Wahlenbergs beskrivelse saa navnkundige Sulitelma.

Ved et indtil 4600' opstigende fjeldpaa eller skar er draget delt i to større hovedpartier, et nordligt og et sydligt. Mod vest holder fjelddraget ned mod de vidtstrakte, ovenomhandlede højfjeldsvidder med Linajegnas og Blaamandens sne- og ismasser. Fra det nysnævnte, 4600' højtliggende skar skyder gletscheren Salajegna nedover dragets mere langsomt afsluttende østlige afhæng. I dragets sydlige afdeling naar den højeste top en højde over havfladen af 5350', i den nordre afdeling stiger nordre Sulitelma op til 6000' (Wahlenberg) og danner Kjælens højeste top.

Naar man fra den midtre del af Lommi-Javre, over de derfra stigende skraaninger søger op under Sulitelmadragets østlige afhæng, vil man snart i en højde af omkring 2800' træffe Salajeknas<sup>1)</sup> afsluttende iskant. Det er et i høj grad fængslende og storartet skue, som her med engang slaar øjet imøde. Fra det sydlige Sulitelmapartis østlige afhæng sees isen i flere paa hinanden følgende afsatser at skyde ned mod højplateauet over Lommi-Javre. Isen er over disse afsatser gjenemsat af en uendelighed af spring eller spaltninger til de forskelligste kanter og afsluttes her nedad i en temmelig stejl vold. Nedunder afsatserne synes isen at maatte have en mægtighed af flere hundrede fod. Kastes blikket ud over det umaadelige ishav, der breder sig frem nedover dragets østlige afhæng og de sagtere skraaninger derunder, sees gruppens for-

<sup>1)</sup> Sala-jekna o: spalto-is (W.).

skjellige tinder, mørke og snebare, at stige op over isen. Iskanten kan følges  $\frac{1}{2}$  mil i sydøstlig retning ned mod et dalføre, Lairö vaggi, der aabner sig mellem de lavere aasdrag Labba og Lairö (3113' W.) og fører ned til den førnævnte Piesko-Javre paa svensk side. Isen ender omtrent der, hvor højfjeldsplateauet under Sulitelma gaar over i Lairö vaggi lige ved rigsgrænsen, i en højde over havfladen af 2619'. Langs denne  $\frac{1}{2}$  mil lange iskant spænder sig mægtige morænevolde med en højde af 22—26 fod og med en brede ved basis af 40' — paa sine steder endog med en brede af opimod et par hundrede fod. Over længere strøg afsluttes isen her med temmeligt svagt skraanende flader og disse ere hyppig gjennessatte af kløfter, der stryge lodret mod iskanten eller morænevoldens længderetning. Nede mod isens afslutning kunne disse have en brede af 6 à 8 fod og med indtil 50 fods høje vægge og maaske endog derover. Opover aftage kløfterne i brede og tabe sig til slutning ganske. Mødes man saaledes af en kløft saa bred at man nødvendig vil vove et hop derover, behøver man i regelen ikke at gaa langt forinden man med lethed vil kunne komme over. Paa andre steder afsluttes isen ikke under sagte skraanende flader, men derimod i flere, rask paa hinanden følgende terrasser — over et længere strøg saaledes i fire stejlt faldende trin, hvert af en højde af mellem 20 à 30 fod. Netop over saadanne strøg maa isen antagelig glide ned med den største bevægelseshastighed og her findes ogsaa de efter bredden mægtigste morænevolde. Opunder de afsluttende endeflader af gletscheren er ofte samlet store masser af fint sandslam, der stadig faa ny tilvæxt dels efter gletschernes underbund dels fra den smeltende sneflade.

Isens temperatur nogle tommer under overfladen var + 0,1 C. (d. 8de Juli).

Fra nordre Sulitelma aftager draget i højde langs efter rigsgrænsen. Ved grænderøs no. 240 stiger, ifølge Wahlenberg, et fjeldparti op til en højde af 4000' og dette falder mod



nord ned mod «Serjas-Javre, der paa egen ejendommelig maade breder sig ud over fjeldryggen, hvor denne er højest» (W.). Serjas-Javre ligger i en højde over havfladen af 2660' (W.) og har sit tilløb fra det paa norsk side under Almajalos liggende fjeldvand Mokum-Javre. Fra nordsiden af disse to fjeldvande rejser sig det mægtige Almajalos, der som før nævnt naar en højde af 5380' (W.). Fra dette snedækte højfjeldsparti skyder Almajalos-jekna ned til alle sider — den mægtigste gletscherdannelse paa disse kanter, næst Salajekna. Mod Serjas-Javre skyder gletscheren ned til en højde over havfladen af 3100' — mens Salajekna først afsluttes ved 2619'. Fra den nordlige side skraaner Almajalos ned mod de før omhandlede snedækte fjeldmarker, der gennemskjæres af den til Ankilvandet førende fjelddal, med pasovergang ved grændseres no. 241. Nordenfor dette dalføre stiger fjeldmassen, efter Wahlenberg, op i en afrundet næsten jevn snedækket ryg, der fra Tulpajekna spænder sig nordover langs rigsgrænsen til henimod Store-Gautilus, ved sydsiden af Gukkis-Javre. De højeste punkter af denne ryg naar op til en højde af 3900' og de laveste punkter gaa ikke ned under 3400' (W.).

Paa den omkring 5 mile lange strækning mellem Gukkis-Javre og Lommi-Javre — paa begge disse punkter ligger vandskillet eller Kjældragets pashøjde i en højde over havfladen af 2300' — gives der intet lavere overgangspunkt over rigsgrænsen end det førnævnte ved grændseres no. 241, imellem Ankelvand og Virik-Javre. Kulminationspunktet ligger her 2770' o. h. Paa den hele strækning fra Kvænangen sydover vil man intetsteds finde Kjældraget skydende frem saa lidt indskaaret ved dybere dalløb og fjeldpas og i det hele saa samlet og masseagtig bygget som netop her. Her naar ogsaa draget i den fra højfjeldet opstigende Sulitelmagruppe sin største højde. Men derfor kan der ogsaa være al grund til at søge Kjældragets egentlige knudepunkt inden disse højfjeldsmasser her.

Østenfor rigsgrænsen antager fjeldbygningen strax et fra det her omhandlede helt forskelligartet præg. Den aftager ikke alene i højde, men den findes her i stor maalestok indskaaret af højfjeldsdale. Det masseagtige, der er saa karakteristisk for fjeldbygningen paa norsk side, træder her ganske anderledes tilbage. Ogsaa paa svensk side kan der vel findes stigende op mellem 4 à 5000' høje toppe, ikke alene nærmere ind mod rigsgrænsen, men selv i adskillige miles afstand derfra. Ved den østlige side af Vastin-Javre rejser sig som før nævnt flere saadanne høje fjeldtinder og det samme er ogsaa tilfældet i grænsestrøget i nærheden af Sulitelma. Og selv saa langt ind mod øst som henimod Quikkjok findes flere snedækte, imellem 4 à 5000' høje toppe. Men de her opstigende toppe «ligge i regelen helt udsondrede fra hinanden, oftest med vide mellemliggende flader» (W.).

#### d. Oversigt over det samlede Kjeldrag.

Det fjelddrag, som her er fulgt i nordsydlig retning i strøget fra Ofoten til Vattenbygden, stiger altsaa langs vestlinjen op dels umiddelbart fra fjordløbene eller ogsaa fra de lave ejdefar: Ballangsejdet, Dragejdet, Horndalsejdet og Fusk-ejdet (eller Saltejdet). Kun paa et punkt — nemlig i det smale fjeldparti mellem Stedfjord og Etfjord — skyder draget helt ud til den egentlige kystlinje (d. e. til Vestfjorden.

Ballangsejdet er  $1\frac{1}{2}$  mil langt og danner et lavland af anseelig brede. Børsvandet, der ligger omtrent midt paa ejdet i en højde over havfladen af 312', har afløb til Etfjord gennem flere ret anseelige forskvande. Imellem Børsvandet og Ballangen hæver sig en lidet højere ryg med sagte stigende skraaninger. Ejdet's kulminationspunkt ligger saaledes mellem Børsvandet og Ballangen og naar neppe højere op end omkring 350' o. h. Ejdet er ret godt bebygget, men der er endnu rig tilgang paa udmærket rydingsland.

Dragejdet er  $\frac{3}{4}$  mil langt og danner ogsaa et lavland af

anseelig brede. Ved siden af vide myrstrækninger og furuvoxede moer vil her ogsaa findes godt rydningsland. Storvandet, hvis østre ende ligger nær ind mod Tysfjord, alene adskilt fra samme ved en lav aasryg, har et med elvebaad passabelt afløb til Varpvandet, der igjennem en nogle faa fods høj og kort strøm flyder ud i Sagfjord. Ejdets kulmination naar neppe over 200'.

Hopvands- eller Mak-ejdet er henimod 2 mil langt. Paa ejdets kulmination ligger det lille Makvand i en højde over havfladen af 238'. Makvand har afløb gjennem 1ste Sagvand til Sagfjord. Fra Lomtjern i nærheden af Makvandet, er der udløb til det anseelige Hopvand, der til begge sider ligger indeklemmt mellem høje fjeldvægge. Gjennem en kort, faa fods høj strøm, har Hopvandet afløb til Nordfolden.

Horndalsejdet er  $1\frac{3}{4}$  mil langt og trangere end de nysnævnte. Langs samme stiger ogsaa fjeldpartierne op i stejlere vægge. Horndalsvandet ligger i en højde af 268' og ejdets kulminationspunkt noget højere, nemlig 430'.

Fuskøejdet er  $1\frac{1}{4}$  mil langt og danner vide lavlandspartier. Kulminationspunktet ligger nærmest Folden — antagelig ikke højere end et par hundrede fod over havfladen. Ogsaa over dette ejde vil der ved siden af anseelige myrstrækningen ogsaa være at paavise adskilligt godt rydningsland.

Samtlige disse ejdefar have en nord-sydlig længderetning med mer eller mindre østlig afbøjning. Kulminationspunkterne ere ved dem alle at søge i den nordligste afdeling og ved de fleste næsten lige ved afslutningen her.

Dette saa bestemt fremtrædende forhold fortjener visselig al opmærksomhed. Det er en aabenbar sag at det ikke kan være at tilskrive blot tilfældige omstændigheder.

Jeg har paa et andet sted<sup>1)</sup> fremlagt vidnesbyrd for at ogsaa det nordlige Norges kyststrøg gjennem kvartærtidens

---

<sup>1)</sup> «Kvartærtidens dannelser inden Tromsø amt.»

tidligere afsnit maa have ligget lavere end nu. Fra Tromsøen er der saaledes af de granitiske rullestensblokke, som der findes udbredt i overordentlig stort, men stadigt aftagende antal fra stranden af opover indtil 300' h. o. h., draget den slutning at landet under glacialtidens sidste periode maa have ligget omkring 300' lavere end nu.

End sikrere vidnesbyrd om den højde, hvortil havlinjen har staaet gennem kvartærtidens tidligere afsnit, er der at aflæse i de opefter dallebene optrædende terrasseformige dannelser. En terrasse, hvis skraa endeflade ligger aaben mod dallebet nedad (og som altsaa her ikke dækkes af nogen vold eller dæmning af glacial oprindelse) kan ikke være dannet i indse men maa være afsat under havfladen. Saadanne terrasser ere nu at paavise paa forskellige punkter i dallebene langs det nordlige Norge og dette i forskellige højder. Ved Musken i Hellemobotten fandtes den øverste terrasse i en højde af 297', ovenfor Hopvandet (Makejdet) i en højde af 242'. Den højeste hidtil — i strøget fra Ofoten til Vattenbygden — paaviste aabne terrasse er i Norddalen, der fra Blaamanden fører ned mod Øvre vand i Vattenbygden. Denne ligger i en højde o. h. af 338'. Disse højtliggende terrasser indeslutte ikke skjælrester<sup>1)</sup> og maa antagelig være at henhøre til glacialtidens yngre afdeling. Der er al sandsynlighed for at den faste fjeldgrund gennem kvartærtiden eller i ethvert tilfælde gennem den største del af kvartærtiden over det hele strøg fra Ofoten ned mod Salten har steget jevnt. Af de højest liggende terrassedannelser af littoral oprindelse paa de forskellige punkter ikke ere at paavise i samme højde over havfladen, kan i og for sig ikke blive at opføre som et vidnesbyrd mod berettigelsen af en forudsætning om en over det her omhandlede strøg ensartet og jevn hævnung af den faste fjeldgrund. Dannelsen af terrasser er jo ogsaa

---

<sup>1)</sup> Skjælferende terrassedannelser eller stranddannelser ere her ikke paaviste i større højde end omkring 150'.

betinget af et sammentræf af flere forskellige forholde. Under landets langsomme stigning er et saadant sammentræf naturligvis ikke knyttet til enkelte horisontalflader, men kan derimod finde sted paa hvilketsomhelst trin af stigningen. Den forskellige højde, i hvilken de terrasseformige dannelser inden disse strøg ere paaviste, de enkelte trins indbyrdes saa højest afvigende højde, den store forskjel paa de forskellige punkter i trinenes antal — alt dette taler med lige saa megen bestemthed for den nys fremholdte forudsætning som mod en oftere fremholdt lære om fjeldgrundens rykvise stigning. Den højest liggende paaviste terrasse angiver saaledes heller ikke havstandens største højde inden et givet tidsrum. Paa den ene side kan der nemlig være mulighed for at betingelserne for terrassedannelse tidligere her ikke vare tilstede, trods det at havstanden her i sin tid kan have staaet højere. Og paa den anden side kan der ogsaa være mulighed for at tidligere og højere liggende terrassedannelse kunne være blevne udgravne, navnlig under glacialtidens afslutningsperiode. Men den aabne terrasse angiver i ethvert tilfælde at havstanden engang maa have naaet op til den højde, i hvilken denne nu er at paavise. Det antages i henhold hertil at maatte kunne holdes frem som en som det synes ubestridelig kjendsgjerning at den faste fjeldgrund over de her omhandlede landstrøg i glacialtidens yngre afsnit har ligget omkring 300' — eller under forudsætning af en over det hele strøg ensartet stigning — mindst 338' lavere end nu. Hvorvidt dette er den højeste grændsevidde for en tidligere havstand inden kvartærtiden, kan for tiden derimod ikke afgøres med nogen fuld bestemthed, — der gives i ethvert tilfælde intet hidtil paavist direkte vidnesbyrd for en tidligere højere liggende havstand inden det nævnte tidsrum.

Af hvad der saaledes er fremholdt, vil det altsaa fremgaa at samtlige her omhandlede ejdefar — en kort strækning over Horndalsejdet alene fraregnet — gennem glacialtidens yngre afsnit helt og holdent har ligget under havfladen. Om dette —

og herfor kunde der dog paa forhaand være nogen sandsynlighed for — ogsaa har været tilfældet med den del af Horn-dalsejdet der stiger op over de nævnte 338', derfor foreligger der som nævnt intet direkte vidnesbyrd. I ethvert tilfælde har der alene været en smal 100' høj ryg, der her kan have steget op over den nævnte havlinje og som har dannet som en bro mellem det egentlige indlandsdrag og det vestenfor samme opstigende fjeldparti.

Indlandsdraget har saaledes gennem længere tidsrum inden kvartærtiden ved sammenhængende sundløb — en enkelt lidet betydelig sammenknytning muligens fraregnet — været saaledes udskilt fra de vestenfor liggende fjeldpartier, at der fra et orografisk udgangspunkt synes at være al føje til at holde dem ud fra hinanden som særskilte fjelddrag. Og selv nu, da indlandsdraget gennem fjeldgrundens stadige hævnning mere umiddelbart er knyttet til de vestenfor liggende fjeldpartier, er det nævnte forhold endnu saaledes fremtrædende, at der fremdeles synes at være grund til at holde paa en saadan sontring.

Saltens indlandsdrag er saaledes knyttet til det tidligere omhandlede fjelddrag, der fra Kvæningen fandtes at skyde sig i sydlig retning ned til Ofoten, at det trods den i flere henseender fremtrædende forskjel dog nødvendigvis maa blive at opfatte sammen med dette som dele af et og samme hele. Og dette samlede fjelddrag antages mest passende at maatte kunne betegnes under navnet af Kjældraget (eller Kjelen).

Mellem Kvæningen og Ofoten fandtes Kjældraget i regelen skydende op fra fjordløbene, ejdefarene og dallebene med karakteristisk prægede murvolde, der i et eller flere tæst paa hinanden følgende sæt naaede op til dragets højdepunkter, der oftest var at søge nærmest det vestlige afhæng. Det samme forhold kan vistnok ogsaa træde frem paa sine steder inden det her omhandlede strøg — saaledes navnlig inden draget langs Ofoten, hvor karakteren i saa henseende endnu er ganske den samme som nordover. I strøget fra Ofoten sydover, er forholdet derimod

i regelen i saa henseende mer eller mindre derfra afvigende. Dragets egentlige højdepunkter ere her oftest at søge længere ind fra vestgrænsen ved eller i nærheden af rigsgrænsen eller selve vandskillet mellem den bottniske bugt og Vesterhavet.

Stiger man saaledes op fra den lille Tysfjord, saa maa man først over omkring 2000' høje, temmelig stejle murvægge, for at naa til et bagenfor liggende bølgeformigt højplateau. Fra dette rejser sig et i nord-sydlig retning langstrakt højfjeldsdrag, hvis øverste top fandtes liggende i en højde over havfladen af 4580'. Hvorvidt dette mægtige snefjeldsdrag mod sit østlige afhæng skyder ned mod selve rigsgrænsen eller om det er trukket noget vestenfor samme, skal ikke kunne afgjøres. Efter hvad der syntes at fremgaa, ved fra højfjeldet her at se ned over det fjeldskar, der deler snedraget i et nordligt og et sydligt hovedparti og derunder fører over til Sitas-Javre ved rigsgrænsen, ligger dragets højryg her nogenlunde i linje med vandskillet.

Indenfor Hellembotten ligger Kjældragets højest liggende punkter og toppe lige ved rigsgrænsen og vandskillet. Her rejser Zhiorroh-Zhjok sig paa norsk og Rautoivve paa svensk side til en anseelig højde over den egentlige fjeldryg. Uagtet de neppe naa synderlig over 3500' eller i ethvert tilfælde neppe til 4000', danne de dog de stærkt fremspringende højdepunkter over vide grændsestrøg.

I omgivelserne af Sagelvdal og over højfjeldet indenfor denne ere forholdene i den omhandlede retning mere vaklende og ubestemte. Aanderbaktinderne, der afslutte Kjældraget ud imod Mørkesvikfjordens udmunding i Nordfolden, naa op til en højde af omkring 3000'. De forskellige toppe og tinder, der skyde op fra det granitiske fjelddrag, som umiddelbart knyttet til Aanderbaktinderne brede sig indover langs Sagelvdalens sydlige side, synes at naa omtrent samme højde. Nogen mærkelig stigning efter østlig retning vil her neppe være at

paavise. Det af skiferstrata byggede højfjeldsparti, der stiger op fra overenden af Sagelvdalens 7de vand, naar sin største højde med 3125' o. h. — altsaa i ethvert tilfælde ikke synderlig højere end lige ved dragets vestlige afhæng.

Imellem Gjerdalselv og Veitdalselv (Østerelv) — der begge gennem Kobvandet have udløb til Lerfjord — rejser sig et mægtigt granitisk højfjeldsparti, der i vest-østlig retning breder sig frem lige mod rigsgrænsen. Dette granitiske drag har gennem sin hele længde en nogenlunde jævn højde og afsluttes mod Kobvandet i stejle styrtninger. Strax udenfor — vestenfor — dette granitdrag rejser sig den over 4000' høje Korko-Zhjokko lige ved Kjeldragets afslutning mod Horndalsejdet. Korko-Zhjokko er ikke direkte maalt, men dets højde overstiger, ifølge Wahlenbergs sigtning fra Almajalos, Store Gautilus's ved Gukkis-Javre lige ved rigsgrænsen, ligesom ogsaa ethvert andet højdepunkt paa norsk side nordenfor Almajalos og anslaaes af ham til 4400'. Forsaaavdt Korko-Zhiokko i virkeligheden skal være at henhøre til det egentlige Kjeldrag,<sup>1)</sup> saa er fjelddragets mest fremspringende højdepunkt altsaa her at søge lige ved dets vestgrændse.

Fra det nysnævnte Store-Gautilus spænder sig en langstrakt, oventil afrundet fjeldryg sydefter langs rigsgrænsen. Højdepunkterne af denne ryg ligger mellem 3400' og 3900' o. h. Denne ryg udbreder sig syd mod Tulpajegnas snedækte fjeldmarker og mod det i nærheden heraf lige ved grænsen liggende fjeldparti Almajalos (5380' o. h.). Strax søndenfor Almajalos rejser sig endelig Almajalos mægtige højfjeldsdrag. Langs hele denne strækning fra Gukkisjavre til Sulitelmas sydlige afslutning ligger Kjeldragets højdepunkter udspændte langs rigsgrænsen.

<sup>1)</sup> Et lavere skar fører nemlig fra Kobvandet bagen om Korko-Zhjokko til Horndalsejdet, og ifald dette her ikke skulde have for stor stigning — hvorom jeg for tiden ikke skal kunne udtale mig — saa kunde Kjeldragets grændselinje være at trække gennem dette skar.



Ser man hen til dragets afslutning langs dets vestlige grændselinje, saa vil man ogsaa her paa sine steder kunne finde draget faldende ned i stejle eller mere udprægede murvægge, paa andre steder derimod med mere langsomt skraanende afheld, hvorved der gives plads for et mere fremtrædende underland. Og i saa henseende synes her det ret mærkelige forhold at træde frem, at draget netop over de strøg afsluttes med mere udprægede murvægge, hvor de mest fremtrædende højdepunkter gennem de vest-østlige profilinjer er at søge, enten fortrinsvis nærmest det vestlige afhæng eller mere fordelte gennem den hele profilinje, saa denne over det hele højfjeld nogenlunde ligger i samme horisontalplan. Der hvor derimod dragets højdepunkter ere at søge længer ind fra det vestlige afhæng opimod vandskillet mellem den bottniske bugt og Vesterhavet — hvad enten nu fjeldgrunden her stiger op i kjedeformige højfjeldsdrag, i mere søndrede fjeldpartier eller i lavere men dog skarpt prægede højderygge — der vil draget i regelen vestover tabe sig i lavere og lavere aasdrag.

Langs Ofoten, fra Rombakken om Skjomen til Ballangen, vil man saaledes finde draget faldende ud i fjorden, med i regelen udprægede murvægge. Men her naar ogsaa fjeldmassen strax ved afhængt en midlere højde, der ikke væsentlig afviger fra højden indover mod vandskillet, samtidig som de højeste fjeldtoppe ere at søge lige i nærheden af vestranden. Ned imod Ballangsejdet afsluttes fjelddraget i et videre underland, der dels indtages af det anseelige Børsvand, dels ogsaa af lavere aasdrag, der i række indover med voxende højde fører op mod de mægtige sneffjeldsdrag, der noget vestenfor rigsgrænsen skyde op i nord-sydlig retning forbi bunden af Indre-Tysfjord.

Mod Dragejdet afsluttes fjeldmassen ligeledes i lave aasdrag, der gaar over i et ret anseeligt underland. En profilinje herfra langs Hellemobotten op til rigsgrænsen vil ogsaa i det hele vise en stadig stigning, der naar sin kulmination

lige ved vandskillet i de her opskydende toppe Zhjorroh-Zhjok og Rautoivve.

Ogsaa ned mod Makvandet afsluttes fjelddraget i lavere rygge, som — om de end naa op til omkring 17 à 1800' — dog ligge dybt under den over 3000' høje ryg, der inden Sagelvdalens 7de vand danner kulminationspunktet i profil-linjen her.

Fra Aanderbaktinderne ved Mørkesvikfjorden og sydover Horndalsejdet ned til Lerfjord afsluttes Kjældraget derimod igjen oftest i mere udprægede murvægge. I denne linje er det at Korko-Zhiokko hæver sig lige ved fjeldmassens vestrands til en højde, der med adskillige hundrede fod overstiger ethvert andet punkt i profilet fra vestrandsen til vandskillet. Men indenfor denne linje bryder ogsaa frem det høje granitiske drag langs Gjerdalselven — med sin i det hele jævne middel-højde fra det vestlige afhæng til dets afslutning henimod rigsgrændsen.

Kjældragets sydligste hovedparti falder fra rigsgrændsen ned over højfjeldsmarkerne og disse afsluttes langs Fuskejdet (Salt-ejdet) i lavere aasdrag, der med stejlere eller svagere fald gaar over i ejdets lavland.

Trækkes en linje efter dragets højryg fra Nora-Javre mod nord til Sulitelmapartiets affald mod Pieske-Javre mod syd, saa vil denne fremstille en bølgeformig linje, dannet af to convexe buer sammenføjede ved en mellemliggende sadelformig ind-sænkning. Fra Nora-Javre sydover er saaledes fjeldmassen i stigende indtil forbi indre Tysfjord, hvor dragets højryg antagelig naaer sin største højde gennem dette strøg i Tysfjordens snefjeld med 4580'.

Gjennem denne del af draget ligger kulminationspunkterne af højfjeldspasserne — det egentlige vandskil mellem den botteniske bugt og Vesterhavet — i regelen lidt over 2000' og gaar neppe nogetsteds ned under dette tal. Nordenfor Nora-Javre, f. ex. over Stordalspasset til Salangsdal, over Altvandet til

Bardo ligger disse kulminationspunkter betydeligt under 2000' — ved det første sted saaledes 1740' ved det andet omkring 1600'. Fra den sydlige afslutning af Tysfjordens snefjeld sænker draget sig i højde, samtidig som vandskillet her vil findes trukket tildels adskilligt ned under 2000' — saaledes indenfor Hellemobotten 1786<sup>1)</sup>). Vandskillet over til Grundfjord og Mandfjord ligger i omtrent samme højde. Denne indsænkning efter dragets højfjeldspartier strækker sig gennem en længde af omkring 3 mil — nemlig fra Mandfjord mod nord til det indre af Sagelvdalen mod syd (eller mellem grændserøerne no. 251 og 247 eller 246). Langs dette strøg fra grændsen vestover vil middelhøjden af de mere fremragende fjeldtoppe ikke overstige 3000', ligesom der her neppe vil være at paavise nogen top, der naar 4000'. De højest stigende toppe inden denne højfjeldsindsænkning ere antagelig Zhjorroh-Zhjok og Rautoivve og disse stige som før nævnt neppe højere end til 3500' eller maaske noget derover. Fra grændserøs no. 246 sydover er højfjeldet igjen i stigende, idet en afrundet langagtig højfjeldsryg fra Store Gautilus ved Gukkis-Javre spænder sig langs grændsen ned mod Tulpajekna under en tophøjde, der ligger mellem 3400 og 3900'. Fra grændserøs no. 241, hvor denne højfjeldsryg afbrydes af et 2770' højt liggende fjeldpas, fortsætter den sydover og gaar her over til de mægtige højfjeldsdrag, der først træder op i det mere udsondrede Ålmajalos og dernæst i Sulitelmadræget. Fra Gukkis-Javre, hvor pasovergangen (vandskillet) ligger omtrent 2300', vil der i retning sydover ikke findes nogen dybere overgang før ved grændserøs no. 241 og her er den endnu 2770'. Under Salajekna — mellem Labba og Lairø, i nærheden af grændserøs no. 239 — ligger vandskillet i en højde af 2619'. Mellem Lommi-Javre og Pieske-Javre er vandskillet sunket ned til 2200'.

Igjennem det lange strøg fra Tysfjord, sydover til Pieske-

---

<sup>1)</sup> 1870 Suhrl.

Javre er saaledes rigsgrænsen — der altid i det store taget, følger vandskillet mellem den bottniske bugt og Vesterhavet — trukket frem efter en linje, der paa det nærmeste følger fjelddragets højryg. Helt anderledes var forholdet i saa henseende i strøget fra Ofoten nordover. Her fandtes det egentlige højfjeldsdrag (o: kjældraget) over store strøg helt og holdent liggende paa norsk side med afslutning mod øst til et omkring 1000' lavere liggende højplateau, der nærmest er at opfatte som en fortsættelse af Finmarkens fjeldmark. Her traadte endvidere det mærkelige forhold frem, at vandskillet mellem den bottniske bugt og Vesterhavet, navnlig langs Lyngen, ikke er at søge paa Kjældraget eller over de samme transversalt gjennemsatte højfjeldspasser, men derimod paa det lavere, østenfor liggende højplateau. Elvedragene fra vandskillet ved rigsgrænsen maa her endog bryde sig vej tversigjennem det høje Kjældrag, for at naa til havfladen paa norsk side. Først over den sydlige del af Tromsø amt trækker Kjældraget sig mere mod øst. Fra strøget om Torne-vand sydover til Ofoten er rigsgrænsen trukket over dragets østlige (indre) afhæng.

Kjældraget fandtes endvidere gennem den største del af Tromsø amt hyppig gjennemsat af saakaldte «aabne dalløb» o: saadanne dalløb, der indover ikke afsluttes ved selve fjeldryggen, men derimod gjennembryder samme, vistnok under dalbundens stadige stigning, og munder ud bagefter det egentlige højfjeld i det østenfor samme liggende højplateau. Saadanne aabne dalfører mangle ganske i strøget søndenfor Ofoten. De dalfører, som her skjær sig ind i draget, gjennemsætter ikke dette, men træde frem som trange fjeldrevner, der indad paa norsk side enten lukkes af stejle endevægge eller gennem langsommere eller stejlere stigning gaa over i højfjeldspassene.

Kjældraget optræder saaledes i strøget fra Ofoten eller Tysfjord ned mod Vattenbygden i Salten som en ganske anderledes samlet kompakt masse end tilfældet var i strøgene nordenfor. Det egentlige højfjeld vil heller ikke gennem Salten findes i

den maalestok gennemskåret af vide og dybe fjelddale og fjeldskar, som tilfældet er nordenfor, og hvorved fjeldpartierne her oftere tildeles en saa udpræget alpinisk karakter. Ogsaa inden Saltens Kjældrag kan alpinske fjeldformer vistnok ret hyppig være at paavise, men i det hele vil dog højfjeldsplateauet her findes mere udpræget end tilfældet er gennem Tromsø amt. Det er i saa henseende betegnende nok at der over højfjeldspartierne inden Salten paa flere steder findes anseelige snemarker med derfra nedskydende tildels mægtige gletschere, medens der over højfjeldet inden Tromsø amt alene er at paavise spredte snepletter, og sammenlignelsesvis kun lidet udviklede gletschere. Og dog gaar fjeldmassens midlere højde inden Tromsø amt neppe under den midlere højde inden Saltens Kjældrag, hvor højfjeldsplateauet allerede fra en højde af 2300' vil findes dækket med evig sne.

Af hvad der saaledes her er fremholdt, vil det fremgaa at Kjældraget norden- og søndenfor Ofoten træder frem under temmelig forskelligartede forholde, og at den begrebsbetegnelse, hvorunder draget inden Tromsø amt er karakteriseret, i sin helhed ikke vil kunne overføres paa draget inden Salten. Her optræder det ikke længer som en murvold med en forholdsvist ringe brede med stejle murvægge efter begge langsider og med en nogenlunde jevn tophøjde, men derimod med en hyppigst endog stærkt opdraget højryg. Til begge sider skraaner denne ned i højfjeldsplateauer, der paa vestsiden snart afsluttes i stejlere afhæng, medens de paa østsiden — efter de hidtil vistnok tarvelige oplysninger, der herom ere indhentede — med langsommere skraaning og uden noget mere fremtrædende stejlere afhæng gaar over i lavlandspartierne om den bottiske bugt.

Et snit gennem Saltens drag fra vestgrænsen østover vil saaledes i regelen give et billede, der ingenlunde vil komme til at svare til den af Keilhau og Munch fremholdte forudsætning om at den skandinaviske halvø i det hele og store

dannede et mod øst heldende skraaplan, med steilt afhæng fra dets vestlige og tillige højest liggende kant. I sin «Übersicht der Orographie Norwegens» udtaler P. A. Munch sig med hensyn til landets fjeldbygning blandt andet saaledes: «Man vil strax se, at der her ikke kan være tale om fjeldkjæder. Begrebet fjeldkjæde forudsætter dog altid til begge sider noget fladt og lavt, som indtager et større areal end fjeldet; det fordrer tillige noget som man kunde kalde en ryg («eine Scheideck»), som tillige danner vandskillet». Holder man sig til det første punkt i disse forudsætninger, saa maa man vistnok indrømme at begrebet fjeldkjæde ikke ganske passer for det omhandlede Kjældrag; dertil er det masseagtige her for stærkt fremtrædende. Derimod er det andet punkt i forudsætningen her tilstede — nemlig en bestemt udpræget vanskil-linje og dragets højpartier udspændte efter denne. Sproget har — saavidt jeg ved — ikke nogen hævdet begrebsbetegnelse for et i flere henseender saa ejendommeligt præget fjelddrag som det her omhandlede. I ethvert tilfælde antages dog begrebet fjeldkjæde at være det hvorunder forholdet nærmest kan søges betegnet.<sup>1)</sup>

Kjældraget i strøget fra Vattenbygden nordover til Kvæn-  
angen vil i henhold til den her leverede fremstilling med få  
ord kunne karakteriseres saaledes:

Langs efter den skandinaviske halvø rejser sig fra Vatten-  
bygden i Salten nordover en fjeldmasse, der spænder sin højde-  
ryg i nord-nordostlig retning og nærmest det vestlige afhæng  
— i en afstand fra samme af mellem 2 à 4 mil. Langs denne  
højryg er vandskillet at søge mellem den bottniske bugt og  
Vesterhavet. Fra Ofoten nordover taber draget dette sit mer  
eller mindre karakteristiske præg af en fjeldkjæde og gaar

---

<sup>1)</sup> I en anmeldelse af Ed. Suess' afhandling «Die Entstehung der Alpen» 1876, betegnes den skandinaviske halvø's fjeldbygning som «eine continentale Massenerhebung».

derimod over til et smalere drag med stejlere afsluttende afhæng efter begge langsider. I strøget fra Lyngen nordover, trækker draget sig sammen i en indtil over 1 mils afstand fra vandskillet liggende murvold, idet vandskillet mellem den botteniske bugt og Vesterhavet er at søge paa et indtil 1000' eller derover lavere liggende højplateau østenfor murvolden.

Den mere kjedeformig prægede del af draget mellem Vattenbygden og Ofoten danner dragets hovedparti, mens den fra samme udskydende murvold nordover snarest kan være at opfatte som en underordnet forgrening fra samme.

Draget i sin helhed betegnes under navnet af «Kjelen».

#### **B. Fjeldpartierne mellem Kjeldraget og Vestfjorden.**

Fra Kjeldragets før omhandlede vestlige grændselinje skyder sig i strøget fra Ofoten sydover til Saltenfjord en række af 5 paa hinanden følgende større halvøer ud i vestlig retning. I retning fra nord mod syd ere disse:

- a. Tjeldlandet — mellem Ofoten og Etfjord.
- b. Hammerølandet — mellem Tysfjord og Sagfjord.
- c. Nordfoldlandet — mellem Sagfjord og Nordfold.
- d. Stavneslandet — mellem Mærkesvikfjord, Nordfolden og Sørfolden med Lerfjord.
- e. Bodølandet — mellem Sørfold paa den ene og Skjærstad samt Saltenfjord paa den anden side.

Med undtagelse af Stavneslandet skyde de øvrige halvøer sig ud helt mod Vestfjorden og danne som et samlet hele dennes østlige bred.

Fjeldpartierne over hver enkelt af disse halvøer danne i orografisk henseende ingenlunde noget sammenhængende hele. Tvertimod ere de, ligesom de helt ere udsondrede fra Kjeldraget, atter igjen udskilt i en række af større og mindre ud fra hinanden sondrede mer eller mindre selvstændige fjeldpartier — dels gennem lave ejdefar, dels ogsaa gennem dybere indskaarne fjeldskar eller fjeldindsænkninger.

Disse halvøer skulle nu her noget nærmere blive omhandlede — hver med sine forskellige underafdelinger.

### a. Tjældelandet

stiger frem vestenfor Ballangsejdet og danner langs Ofoten et vildt af gneisgranit bygget fjeldparti «Tjældedraget». Dette drag er forevrigt ikke nærmere undersøgt. De højeste toppe naa her antagelig op omkring 2500'.

Tjældelandet har ved glacialtidens afslutning været omflydt.

### b. Hammerølandet

breder sig fra Dragejdet nord- og vestover mellem Sagfjord og Tysfjord ud til Vestfjordene. Halvøen er ved det højere Tysfjordejde — mellem Sørkil og Tysfjord — samt ved de lave og korte ejdefar, Præstejdet og Havnsundsejdet, delt i fire fra hinanden sondrede landpartier, hver med sit fjelddrag. Disse ere Ulfvaagsdraget, Tilthorndraget, Børra og Havnsundsdraget. Den faste fjeldgrund dannes af gneisgranit. Underlandet optages her som saa ofte, hvor den faste fjeldgrund dannes af gneisgranit, tildels af anseelige myrvidder.

#### 1. Ulfsvaagsdraget.

Landpartiet mellem Dragejde og Tysfjordejdet er i det hele forholdsvis lavt bygget. Ulfsvaagdraget, der her skyder frem i nordostlig retning fra Sagfjord nordover mod Kilvand, viser i det hele mildere former og hæver sig selv med sine højeste punkter neppe over 1500'. Mod øst skraaner draget ned mod det ret anseelige lavland, der fører ned mod Dragejdet. Mellem dette lavland og Tysfjord rejser sig et aasdrag, der falder temmelig stejlt ned mod fjordeu.

#### 2. Tilthornets drag

stiger frem over den lille halvø, der fra Tysfjordejdet skyder sig nordover til Tysnes ved Tysfjordens munding. Over den



sydlige del af halvøen stryger i øst-vestlig retning et i høj grad vildt men forholdsvis smalt landparti, der stiger op i en række tildels spidse tinder — de saakaldte Titlvikhorn (eller Tiltvikhorn). Den mest bekendte mellem dem er det fint byggede Tilthorn. Dette er vel ikke den højeste top inden draget — en af de andre antages at naa nogle hundrede fod højere — men danner dog paa grund af sin ejendommelige form et af de mest fremtrædende punkter langs Vestfjordens indre side.

Tilthornene naa antagelig op imod 3000'. I de i fjeldpartiet indskaarne kløfter og skar findes hyppige samlinger af sne og tildels ogsaa is. Mod nord falder højpartiet ned mod et lavt myret underland, der breder sig frem til halvøens afslutning mod Tysnes og Korsnes.

Tysfjordejdets kulmination antages at ligge omkring 3000' o. h. eller maaske endog derover.

### 3. Børra

danner et højt aasdrag — der dog neppe naar synderlig over 1500' — og stryger i øst-vestlig retning frem over den sydlige del af den lille halvø, der stiger op vestenom det lave Præstejde. Mod nord gaar Børra over i et myrlændt underland, der afsluttes mod Vestfjorden mod handelsstedet Tranø.

### 4. Havnsundsdraget.

Den ret anseelige halvø, der skyder sig frem vestenom Havnsundsejdet, stiger langs den vestlige side (o: langs Vestfjorden) op i et vildtbygget fjeldparti, der opad afsluttes i en række af tinder. Sendenfor det høje Dalsværejde (Dalsværskar) rejser sig de to Vaagstinder og strax nordenfor nævnte ejde den ejendommelig formede ubestigelige Hammeretind. Strax nordenfor denne, adskilt fra samme ved et dybere skar stiger de to Havnsundstinder op omtrent paa halvøens midte og i nærheden af dem de to Ekedalstinder, der afslutte det høje fjeldparti mod nord.

Vaagstinderne og Havnsundstinderne stige højest op mellem disse toppe, men antages dog ikke at naa fuldt op til Tilt-hornets højde. Mod øst afsluttes fjeldpartiet i et videre underland.

---

Af de her nævnte ejder have Præstejdet og Havnsundsejdet i en nærliggende tid rimeligvis dannet sundløb. Navnet Hammerø, der den dag idag benyttes som et fællesnavn for Børras og Havnsunddragets halvøer, synes at antyde at dette har været tilfældet endog saa langt ned som i den historiske tid. Man behøver i saa henseende her heller ikke at ty til forudsætningen om fjeldgrundens stigning. Ejdedannelsen er her antagelig væsentlig at tilskrive sundløbets opgrunding gennem tilskylning af løst materialie.

Tysfjordejdet ligger derimod højere. Den ovennævnte kulmination af omkring 300' er opgivet efter et blot løst skjøn og kan saaledes muligens afvige adskilligt fra det rette forhold. Skulde dette tal imidlertid findes nogenlunde stemmende hermed, maa ogsaa dette ejde ved glacialtidens afslutning have dannet et sundløb.

Til Hammerølandet maa endvidere blive at henhøre øerne Tanø, Finnø og Lundø.

Tanø ligger midt i den lille fjord, der fra Vestfjorden skyder sig i sydlig retning ned mod Præstejdet — mellem Børras og Ulfsvaagsdragets halvøer. Øen danner et temmelig højt aasdrag, der naaer sin største højde i Tuva (Tuen).

Finnø danner en større ø i Sagfjorden. Den har sin længdeudstrækning fra v. mod ø. Den østlige del af øen er højest og stiger op i et omkring 800' højt aasdrag.

Lundø ved Sagfjordens udmunding danner et højt af gneisgranit bygget øland, hvis højeste toppe antagelig naaer op til omkring 2000'.

Engelø, der for største delen er bygget af lagrækker tilhø-

rende Tromsø glimmerskifergruppe, naar i Præstekonetind sin største højde med 2100' (v. Buch).

### c. Nordfoldlandet.

Fra den vestlige side af Makejdet rejser sig høje fjeldpartier, der først breder sig frem vestover mellem Sagfjord og Nordfolden, men derpaa bøjer af i mere sydlig retning, indtil det her afsluttes i Brændtindens høje halvø ved Nordfoldens udmunding.

Denne halvø er ved forskellige indskudte fjordløb og højere og lavere ejdefar delt i en række større og mindre udfra hinanden sondrede fjeldpartier.

Fra Sagfjorden skjær Strømsfjorden og noget vestligere Holmokfjorden sig ind i sydlig retning. Fra Nordfolden derimod skyder Baltjosen sig i nordlig retning, og afsluttes i en østlig og en vestlig forgrening. Fra Vestfjorden skjær den trange Skotsfjord og Leinesfjorden sig ind i østlig retning.

Østre Baltjosejde fører fra Bjørnsviken ved Lille Baltjosefjord — Baltjosens østre forgrening — i nordlig retning over til bunden af Strømsfjord. Dette ejde er omkring  $\frac{1}{2}$  mil langt. Kulminationspunktet antages at ligge omkring 500' højt. Omtrent midt paa det mellem Strømsejdet og Makejdet liggende landparti ligger Storvandet i en vid indsænkning. Storvandet antages at ligge omkring 400' o. h. Det har mod nord afløb til Sagfjorden ved Forsaa, mod vest gennem det lille Lommervand ogsaa afløb til Baltjosens østre arm.

Storvandets indsænkning er mod sydost og nordost omkrandset af et højt fjelddrag (Storvandsdraget). Imellem indsænkningen og Strømsfjord rejser sig et højt aasdrag (Strømsfjorddraget). Mod vest gaar lavlandet om Storvandet over i landspartierne om det nævnte ejde.

Fra Baltjosens vestre arm fører et ejde af omtrent  $\frac{1}{2}$  mils længde over i nordvestlig retning over til Dypingspollen ved

Holmøkfjordens østlige side. Dette «vestre Baltjøsejde» stiger op til omkring samme højde som det østre.

Skjelverejdet fører fra bunden af Holmøkfjorden i sydvestlig retning over til Myklebostad ved Leinesfjorden. Dette ejde er omkring 1 mil langt, lavt og myrlændt.

Holmøkejdet fører fra gaarden Fure ved Holmøkfjord over til Liland ved bunden af Skotsfjord. Ejdet er ganske lavt, omkring  $\frac{1}{2}$  mil langt og for en stor del optaget af en række smaa ferskvande.

Skotsfjordejdet fører fra gaarden Sjenest ved Flaksund i sydlig retning over til Underaa ved bunden af Skotsfjord. Det har en længde af  $1\frac{1}{2}$  fjerding, kulminationspunktet ligger omtrent 250' o. h.

Sauvfjordsejdet fører fra Liland ved bunden af Skotsfjord i sydlig retning til Sauvfjord ved Leinesfjorden. Ejdet er omkring  $\frac{3}{4}$  mil langt, kulminationspunktet ligger nærmest mod Sauvfjord. Det har afløb mod nord til Skotsfjord.

Ersvikkejdet fører fra Ersviken, der skyder sig ned mod syd fra Skotsfjorden ud imod dens udmunding, over til Land. Højden af dette ejde er ikke nærmere opgivet.

Nordfoldejdet fører gaarden Nordfolden over til bunden af Leinesfjorden. Dette er omkring  $\frac{1}{2}$  mil langt. Højden omkring 300' — maaske noget højere.

Noget søndenfor Nordfoldejdet fører Osfjordskaret over fra Nordfolden til gaarden Aspnes i nærheden af Leinesfjordens bund. Dette er temmelig højt — antagelig 5 à 600'.

Fra bunden af Leinesfjorden skyder Marhaugdalen sig ind i nordvestlig retning til Almindingsvandet og herfra fører en dyb indsænkning til Laxaavand, hvorfra et elvefar løber ned til Laxaa ved Nordfolden.

Gjennem disse mange indskjæringer er halvøen udsondret i følgende 12 forskellige mer og mindre selvstændige fjelddrag.

### 1. Storvandsdraget.

Dette drag stryger fra Baltjosen langs Nordfolden indtil Stopvandet, bøjer sig om Hopvandet og fortsætter langs Makejdets vestlige side ned mod bunden af Sagfjord og udefter langs denne indtil henimod Forsaa. Som før nævnt omkredser dette fjelddrag det ret anseelige lavland om Storvand. Draget naar sin største højde i strøget mellem Hopvandet og Makvand. Her skyder det op i en række toppe og tinder, hvorimellem Kaltind og Rødtind antagelig naa op til omkring 2500' (eller maaske til henimod 3000') med ret anseelige masser af sne og is i de højest liggende fjeldskar. Mod den nedre ende af Hopvandet stiger Sandtinden frem. Fra Makvandet fører et lavere fjeldskar over til Storvandet. Mod Sagfjorden falder draget gennem en længere strækning ned i Furnesvæggens stejle, saagodtsom utilgængelige styrtninger.

Langs Nordfolden — fra Hopvand til Baltjosen — stikker grundfjeldets gneislag frem, og langs den indre del af Sagfjord gneisgranitiske partier i veksling med gneisartede lag. Det høje drag langs Makejdet er derimod bygget af krystallinske skifere tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe, hvis lagrækker i smuk regelmæssig lagstilling nede fra ejdet sees under vestligt fald af 40' at skyde ned over de højere toppe.

### 2. Strømsfjorddraget

stiger op mellem Strømsfjord og Storvandet. De højeste toppe her naa en højde af opimod 2000'.

Dette fjeldparti er ikke nærmere undersøgt, men antages at være bygget af lagrækker tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe.

### 3. Dypingsdraget

bygger den lille halvø, der skyder frem fra den vestlige side af Strømsfjord og ned mod bunden af Baltjosen og her begrændset ved de to Baltjosejder. Landet er temmelig højt og

skyder op i forskellige toppe og tinder, der antagelig naa op til en højde af omkring 2000'. Mellem disse ere nævnte Kvas-tinderne og Tretinderne.

Grundfjeldets gneislag træder frem i partierne ved Balt-josen. Forøvrigt antages draget, — der ellers ikke er nærmere undersøgt, at være bygget af lagrækker tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe.

#### 4. Fjeldpartiet mellem Vestre Baltjosejde, Skjelverejd og Nordfoldejdet.

Dette fjeldparti er i adskillig grad indskaaret ved dybere dalløb eller fjeldkløfter. Fra Almenningsvand fører som før nævnt et lidet ejdefar ned til botten af Leinesfjord og gennemløber her et lavt liggende underland med de smukt liggende Marhouggaarde. Undergrunden dannes her tildels af muslingførende ler. Fra Almenningsvandet fører en dybere indsenkning over til Laxaavand, der har afløb til Nordfolden. Ved denne indskjæring er fjeldpartiet delt i to underafdelinger:

##### *α.* Grøntindernes drag

stiger op østenom Almenningsvandet — mellem Marhougdal og Nordfolden, og danner et højt aasdrag, der naar sin største højde i Grøntind. Lille Grøntind naar en højde af 1424'. En højere top stiger op strax nordenfor — antagelig et par hundrede fod højere.

##### *β.* Knedalsdraget

vestenfor og nordenfor Almenningsvand og Laxaaelv, indtager den forholdsvis største del af omhandlede strøg. Fjeldet stiger her i regelen op i stejle murvægge. Karakteristiske sækkedale findes indskaarne i fjeldmassen. Fra Marhoug skjær en sidedal sig ind i nordvestlig retning, og fra bunden af denne maa man over selve fjeldhøjden for at naa ned til Knedal — omtrent midt paa Skjelveejdet. Kulminationspunktet ligger her 1431'

o. h. Nordover hæver fjeldmassen sig i højde, men de højeste toppe — hvorimellem Renkalvtind — naa dog neppe højere end omkring 2000'.

Grøntindens drag er bygget af lagrækker tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe. Opper Grøntinden gennemses skiferen af gneisgranitiske partier, der dog her i det hele optræder temmelig underordnet. Den vestligere større afdeling er bygget af glimmerskifergruppen. Opper højfjeldet mellem Knedal og Marhoug findes deri ret anseelige indlejninger af kornig kalksten.

### 5. Dypviksfjeldet

indtager det fremspringende landparti mellem Holmokfjord og Flaksund og er gennem Holmoekjdet og Skotsfjordekjet udkilt fra de øvrige fjeldpartier.

Dypviksfjeldet danner en rundagtig kol af omkring 1300' højde.

Er antagelig bygget af glimmerskifer.

### 6. Fløjen.

Dette drag stiger op strax vestenfor Skotsfjordekjet og bygger den lille halvø mellem Flaksund og Skotsfjord.

Draget danner en lang i øst-vestlig retning fremskydende ryg, der naar en højde af omkring 1500' og styrter brat ned mod Flaksund. Langa det sydlige afhæng skraaner det langsommere ned mod lavlandspartierne langs den nordlige side af Skotsfjord.

Er antagelig bygget af glimmerskifer.

### 7. Sauvjorddraget

stiger op mellem Sauvjordekjet og Ersvikekjet. Det danner et vildt af gneisgranit bygget fjeldparti, der i stejle styrtninger falder ned mod Sauvjordekjet.

## 8. Skotstindernes drag

mellem Ersvikejdet og Vestfjorden. Det naar sin største højde i Skotstinden, der falder ud imod havet i stejle styrtninger. Antages at naa en højde af mellem 2500—3000'. En dyb hule skjær sig ind i tinden i sammes lavest liggende del — ikke langt over havfladen.

Dette drag er bygget af kyststrækningens gneisgranit. En hel række af smaaer og holmer — hvorimellem *Grøtø* — skyder op i en krands om fjeldpartiets vestlige afslutning. Ogsaa disse ere væsentligst byggede af gneis i vexling med gneisgranit.

## 9. Lilandstinden

danner et isoleret liggende fjeldparti mod bunden af Skotsfjord og Holmokfjord og begrændset af Sauvjordsejde og Skjelverejd. Dens højde ansættes til omkring 1600'. Den er antagelig bygget af glimmerskifer.

## 10. Bottenfjeldet

stiger op som en lavere fjeldklump mellem Nordfoldejdet og Osfjordskar.

Den er bygget af glimmerskifer.

## 11. Brændtindens drag

danner halvøens afaluttende parti mellem Leinesfjorden og Nordfolden og afakjæres fra Bottenfjeldet ved Osfjordskar. Det danner et højt og vildt landstrøg med en række af tinder og toppe. Mod Nordfolden rejser sig Kraaktinden og Valfjeldet og mod Ytersiden Brændtinden. Flere af toppene naa her antagelig op til en højde af omkring 3000'.

Fjeldpartierne langs Nordfolden ere byggede af glimmerskifer. Hvorvidt det samme er tilfældet i fjeldpartierne langs ytersiden er ikke undersøgt; — der er dog nogen grund til at forudsætte dette.

---



Af de her omhandlede ejder ligger Skjelverejdet, Holmokeidet, Skotsfjordeidet og antagelig ogsaa Ersvikeidet saa lavt at de have dannet sundløb under glacialtidens afslutning. Det samme er ogsaa tilfældet med Nordfoldejdet — i ethvert tilfælde skal forskjellen her ikke findes væsentlig. Nordfoldlandets store halvø vil saaledes ved disse ejdefar, der ved nævnte tid maa forudsættes at have dannet sundløb, været delt i 5 eller 6 forskellige helt fra hinanden udsondrede øer. Under forudsætning af at landet under glacialtidens tidligere afsnit har ligget omkring 500' lavere end nu, vil derimod halvøen paa denne tid have været delt i 10 forskellige øer, — nemlig samtlige fornævnte med undtagelse af Bottenfjeldet, der dannede en del af Brændtindens ø. Hvorvidt det under no. 4 omhandlede fjeldparti da var udskilt i sine to underafdelinger som særskilte øer, skal for tiden ikke kunne siges — i ethvert tilfælde antages kulminationen mellem Almindingsvand og Laxaa neppe at gaa synderlig over 500'.

#### d. Stavneslandet.

Den vestlige del af halvøen danner et i høj grad vildt fjeldparti. Fra Nordfolden skjær Vinkelfjord med Stavfjord sig østlig ind gennem halvøens nordlige del, og sendenfor denne, Refsfjord med Sagfjord i nærheden af Rørstad kirke.

Om disse fjordløb stiger frem en række tildels ret høje toppe og tinder. Mellem Mørkesvikfjord og Stavfjord rejser sig Renviktinderne med sine to spidse horn. I strøget fra Vinkelfjord sydover skyder den mægtige Bratfjardtind, Lille Tuva og Stortind op i stejle styrtninger fra fjordlinjen. I nærheden af Rørstad hæver sig Rørstادتinden. Flere af de her fremskydende toppe naa antagelig en højde af omkring 3000'. Langs Sørfolden falder det høje fjelddrag ned mod Bjørnsvik og herfra breder sig et lavere af aasdrag gjennemsat landstrøg sig indover mod Lerfjord.

De høje fjeldpartier langs Nordfolden indtil forbi Bjørnsvik

ved indbøjningen mod Sørfold ere byggede af grundfjeldets gneis, hyppigen gjennemsat af eller vexlende med gneisgranitiske partier. Om Rørstad og Sagfjorden indover optræder gneisgraniten i et mere selvstændigt parti.

Hjertø og Maase (Præst-Maase) ere to smaa af gneis og gneisgranit byggede øer. Hjertø ligger omtrent midt i løbet ved Nordfoldens udløb og naar en højde af mellem 5 à 600'. Præst-Maase er mindre og lavere og ligger ved udmundingen af Refsfjorden.

Stavneslandet har som før omtalt ved en lav aasryg, der danner Horndalsejdets kulmination, under glacialtidens afslutning været knyttet til Kjældraget.

#### e. Bødelandet.

Dette landparti dannes af den store halvø, der fra Fuskøjet (Saltejet) breder sig vestover mellem Sørfolden paa den ene og Salten- med Skjærstadvord paa den anden side. Fra Sørfolden skjær de smaa fjorde Sjunkfjord og Nevelsfjord sig ind i sydlig retning. Fra Skjærstadvorden derimod Fuskøbøgt, Klungsetviken, Nordvikbotten med Valnesfjorden sig ind i nordøstlig retning, og fra Salten endelig Hopen, ligeledes i nordøstlig retning.

Fra bunden af Hopen fører et øjde over i nordlig retning til Mystfjordens sydlige arm. Den største del af dette øjde optages af det anseelige Vattenvand. Et andet øjde fører fra Mystfjordens nordre arm over til Nevelsfjord. Ved disse to øjder er halvøen udsondret i et større østligt og to mindre hovedpartier, der danne halvøens vestrønd.

#### 1. Fjeldpartiet fra Fuskøjet til Hop- og Nevel-øjet.

Fra syd af er dette som før nævnt indkåret af Nordvikbotten med dens videre forgrening, Valandsfjorden. Denne sidste er omgivet af et vidstrakt lavt underland, i regelen med

en undergrund af saltvandsler, der paa sine steder træder umiddelbart frem i dagen, men som oftest dog er dækket med vide myrstrækninger. Fra bunden af Valandsfjorden breder sig endvidere nordover et vidt, af lave aasdrag gjennemsat lavland med langsom stigning nordover. Mellem disse aasdrag er særlig at mærke Næverhøugen med sine mægtige nedlag af jernmalm (rødjernsten indblandet med magnetjern). En række af større og mindre ferskvandssøer — samtlige med udløb til Valandsfjorden — ligge udstræede over dette lavland. Den nordligst liggende af disse er Sætervand med udløb til Halsvand og Hømmervand. Længere syd — mod den vestlige side af Næverhøugen — ligger det anseelige Grølevand. Fra den nordre del af dette underland, hvor det gaar over i højfjeldet, fører to dybere fjeldskar med en kulmination, der neppe naaer højere end omkring 1000' o. h., over til Sørfolden — det østlige skar fra det nysnævnte Sætervand over til handelsstedet Røsvik ved Sørfolden, et vestligere over til gaarden Kaarsvik, ligeledes ved Sørfolden. Ved disse to ejder og det omhandlede lavland kan fjeldpartiet over dette landstrøg sondres i følgende 3 underafdelinger:

#### α. Dypviksdraget

mellem Fuskejdet paa den ene, og Røvikskaret med Næverhøugens lavland paa den anden side.

Dette drag danner en lavere fjeldryg, hvis højest liggende punkter antagelig neppe naaer over 16 à 1700'. Mod Sørfolden falder draget ned med temmelig stejlt afhæng.

#### β. Sætervandsdraget

danner det lille fjeldparti mellem Røvikskaret og Kaarsvikskaret. Det stiger temmelig stejlt op fra Sætervandet, men falder med langsommere held ned mod Sørfolden. Det har en højde omtrent som foregaaende drag.

### γ. Sjunktindernes drag.

Fra Kaarsvikejdet og lavlandets vestside stiger et højt sønderrevet fjeldparti frem med en række af høje ofte karakteristiskformede tinder og horn. Mellem disse kan mærkes: Kaarstind, der rejser sig fra Kaarsvikskar, Sjunktinderne om bunden af Sjunkfjord, Skejstind (eller Purkviktind) paa den lille fremspringende halvø mellem Sjunkfjord og Nevelfjord og endvidere Mjønestind ned mod Nordvikbotten. Disse toppe naa antagelig samtlige op imod 3000'.

Dypviksdraget og Sæterdraget er bygget af glimmerskifer, Sjunktindernes drag derimod af gneis, hyppig gjennemsat af granitiske partier.

Øjskavlen er en lav fjeldhump, der bygger den fremspringende halvø mellem Fuskebugten og Klungsetviken. Den dannes af lagrækker, der tilhøre Balsfjordens skiferfelt. Længst frem over Øjskavlens stikker frem et smukt konglomerat, — tildels breccieartet.

### 2. Strandtindernes drag

bygger halvøen mellem Nevelfjord og Mystfjord.

Den højeste top mellem Strandtindernes vilde gruppe naar en højde af 3110' (Wahlenberg).

Strandtinderne danne i forbindelse med de før nævnte Sjunktinder, Skejstind, Kaarsviktind tilligemed fjeldpartierne om Rørstad et i høj grad storslagent og tillige afvekslingsrigt hele. Der er neppe noget strøg langs den hele nordlandske kyststrækning, der i saa henseende vil kunne blive at stille ved siden af landpartierne om Foldens udmunding.

Dette fjeldparti er bygget af gneis, — mod Sørfolden i vexling med gneisgranit.

### 3. Saltendraget

danner et lavere drag uden nogen synderlig fremspringende højde: Langs Saltenfjorden gaar det over i et bakket aasdrag,

der ned mod Bodø kirke og Bodø by afsluttes i et temmelig vidstrakt tildels myrlændt underland.

I lavlandet langs Saltenfjord træffes hyppige samlinger af fint sand med muslingrester.

De lavere aasdrag langs Saltenfjord er tildels bygget af lagrækker, der ere at indordne under Balsfjordens skifergruppe. Forevrigt er landpartiet bygget af Tromsø glimmerskifer, ligesom gneisen ogsaa paa sine steder her kan findes trædende frem.

Strax udenfor Bodø by skyder op de smaa øer Nyholmen, Hjerte og Skibsholmen. De ere byggede af gneisgranit, der her gennem sætter gneisartet glimmerskifer.

Landegode er et højt øland, der stiger op i omkring 1 mils afstand vestenfor det her omhandlede landparti. De højeste toppe naa her op til omkring 2000'. Landegode er bygget af gneisgranit.

---

Under glacialtidens afslutning har Bodølandet dannet 3 fuldtudskilte ølegemer.

### C. Afsluttende oversigt.

I strøget fra Ofoten sydover til Saltenfjord rejser der sig saaledes over det nuværende fastlandsstrøg udenfor Kjeldraget en række af 23 i mer eller mindre grad ud fra hinanden sondrede fjeldpartier. I dette antal er indbefattet samtlige ovenomhandlede fastlandsstrøg med sine forskellige underafdelinger. Holder man sig imidlertid til forudsætningen om at havlinjen ved glacialtidens afslutning har staaet omkring 300' — eller som ovenfor paavist 338' — højere end nu, vil den nuværende fastlandsstrækning, der skyder frem vestenfor Kjeldraget i strøget fra Ofoten til Salten ved glacialtidens afslutning have dannet en gruppe af 12 helt ud fra hinanden udsondrede øer. Den store halvø mellem Nordfolden og Sørfolden var dengang endnu

ved en smal og lav ryg, der danner Horndalsejdets kulmination, forbundet ved Kjældraget. Det samme forhold gør sig altsaa gjeldende her som over strøget mellem Ofoten og Kvænangen, hvor den største del af fastlandet udenfor Kjældraget dannedes af 16 forskellige under glacialtidens afslutning fuldt udsøndrede øer, — foruden to halvøer, der ved lave broformede rygge endnu vare forbundne med Kjældraget. Uagtet der over disse strøg ikke er aflæst ligefremme vidnesbyrd om at den faste fjeldgrund gennem kvartærtiden har steget efter et større maal end de nævnte 338', kan der dog i henhold til hvad der er paavist fra landets sydligere del paa forhaand være nogen sandsynlighed for at det samme forhold ogsaa er at gøre gjeldende for disse egne, — at landet ogsaa her gennem den hele kvartærtid har været i jevn stigning af omkring 500'. Under denne forudsætning vil den nuværende fastlandsstrækning udenfor Kjældraget i strøget fra Salten til Ofoten under kvartærtidens tidligste afsnit have udgjort en samling af 19 større og mindre helt fra hinanden søndrede øer.

Samles de her omhandlede fjeldpartier i strøget fra Ofoten til Salten, saa vil man finde at de fra et orografisk synspunkt kunne sammenstilles i tvende store hovedpartier, nemlig et højere fjelddrag langs den egentlige kyststrækning (Vestfjorden) og et lavere landparti mellem det høje kystdrag og Kjældraget. Dette forhold er tildels ret skarpt udpræget over længere strøg. Saaledes navnlig over halvøen mellem Skjærstad og Salten paa den ene og Sørfolden paa den anden side, — mellem Sagfjord og Tysfjord og mellem Edfjord og Ofoten. Over halvøen mellem Nordfolden og Sagfjord er derimod forholdet i saa henseende mere udvisket og det samme er for en del ogsaa tilfældet over halvøen mellem Nordfolden (Mørkesvikfjord) og Sørfolden med Lørfjord. Denne sidste halvø er i det hele temmelig høj, men ogsaa her skyder de højeste fjeldpartier dog frem i halvøens afsluttende partier længst mod vest.

At den høje vestrand i regelen dog ikke naar den højde

som det indenforliggende Kjældrag er nærmere paavist under detailbeskrivelsen.

De her skildrede forholdte fortjene visselig al opmærksomhed. De synes nemlig at skulle kunne give væsentlige bidrag til spørgsmaalet om fjorddannelsen over disse strøg og dermed antagelig ogsaa bidrag til belysningen af andre hermed i forbindelse staaende spørgsmaal.

For nærmere at kunne gaa ind paa behandlingen heraf vil det imidlertid først være nødvendigt at kaste et kort overblik over de her omhandlede strøgs geologiske bygningsforholde. Herunder skal da tages hensyn saavel til Kjældraget som til fjeldpartierne vestenfor dette.

Den faste fjeldgrund her dannes af følgende lagdelte grupper:

1. En ældre gneisafdeling (antageligen laurentisk).
2. Tromsø glimmerskifergruppe (antagl. huronisk).
3. Balsfjordens skifergruppe (antagl. takonisk).

Af massiver optræder alene granit, hvortil endvidere er at føje kyststrøgenes saakaldte gneisgranit. Denne sidste er dog nærmest at opfatte som en metamoffoseret bjergart, umiddelbart knyttet til den ældre gneisafdeling og tildels ogsaa til Tromsø glimmerskifergruppe.

Kjældraget er for en stor del bygget af lagrækker tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe. Grundfjeldets gneislag træder her kuns ganske underordnet frem paa et par lokaliteter. Lagrækker af en yngre afdeling end glimmerskifergruppen bygger de sydligste partier om Langvandet og Lommi-Javre. Denne afdeling her er foreløbig indordnet under Balsfjordens skiferfelt — maaske vil det gennem fortsatte undersøgelser sydover vise sig at den kan være at sammenstille med en af de throndhjemiske skiferafdelinger. Et anseeligt granitisk parti bryder frem i strøget fra bunden af Sørfolden op til Mandfjord — en af Tysfjordens sidegrene. Hvorvidt denne granit er eruptiv eller ej skal ikke kunne siges med mere afgjørende

sikkerhed. Der ere forholde at aflæse, der kunne pege i begge retninger. Længs den vestlige grændselinje bryder graniten frem mellem stejltstaaende lagrækker af Tromsø glimmerskifergruppe, hvis strøgetning her i regelen bøjer sig efter granitdraget, med fald snart fra graniten men snart ogsaa skydende ind under samme. Indover (mod øst) er grundfjeldet paa forskellige punkter fundet overlejet af haarde krystallinske skifere med østligt fald, glimmerskifer, kvartsitisk skifer og sandstenagtig glimmerskifer. De danne lagrækker, hvis geologiske plads endnu ikke er saaledes bestemt at man derom skal kunne udtale sig med afgjørende sikkerhed, mens der dog paa forhaand synes at være føje til at indordne dem under Tromsø glimmerskifergruppe. Graniten selv dannes af hvidlig feltspath, kvarts og mørk magnesiaglimmer og viser en forherskende hvidlig grundfarve. Bjergarten optræder i regelen ingenlunde som ren typisk granit, — den er hyppigst stribet og viser oftere overgang til renere gneisartet sten. I petrografisk henseende er den i virkeligheden ogsaa ganske identisk med de gneisgranitiske afsondringer, der bygge fjeldgrunden om Stedfjord og Esfjord og som der ere knyttede saaledes sammen med gneis og rene skiferlag (glimmerskifer, hornblendeskifer) at det maa være aabenbart at de granitiske afsondringer danne et med skiferen sammenhørende hele. Der er i virkeligheden ogsaa flere forholde der synes at pege hen paa at Kjeldragets granit er at sammenstille med gneisgraniten ud imod Tysfjorden. Men selv Kjølgranitens eruptive oprindelse forudsat, er der dog liden grund til at opfatte den som et mere bestemmende led for det hele Kjøldrag. En saadan forudsætning kunde alene gjøres gjeldende for det strøg inden Kjøldraget hvor det nævnte granitiske parti træder frem. Men Kjøldraget breder sig herfra mod nord udover forholdsvis langt større strøg, og her er der alene at paavise helt underordnede og spredte granitiske smaa partier. Der synes saaledes i det hele at være liden grund til



at forudsætte at Kjældragets fremstigning skulde være at tilskrive frembrud af eruptive masser.

Over fjeldpartierne vestenfor Kjældraget træder gneisen frem i det høje fjelddrag, der mod vest afslutter halvøen mellem Salten og Folden, fremdeles over det vestlige højfjeldsparti mellem Sørfolden og Nordfolden. Herfra fortsætter den over til den nordlige side af Nordfolden (Mørkesvikfjorden) hvor den træder frem i strøget mellem Hopvandet og Baltjosen. Gneisen er her overordentlig hyppig gjennemsat af granitiske afændringer. En mere selvstændig fremtrædende gneisgranit bryder frem ved den sydlige side af Sørfoldens udmunding, saaledes i den lille fremspringende halvø mellem Nevelsfjord og Sjunkfjord. Ogsaa ved den nordre side af fjorden tversovenfor dette parti bryder frem en dermed ganske analog granitisk afændring i strøget om Rørstad og indover den lille Sagfjord, der skyder sig ind fra Rørstad kirke. Sauvjorddraget og Skotstindernes drag ud mod Grøtø er ligeledes bygget af gneisgranit.

Et større gneisgranitisk felt træder frem over den store halvø mellem Sagfjord og Tysfjord. Denne er fra dens afslutning mod vest østover til en linje, der er at trække lidt indenfor bunden af Sagfjord over til Hellemofjorden lidt udenfor Lerviktinderne, helt og holdent bygget af gneisgranit. Endvidere bygger gneisgraniten halvøen mellem Stedfjord og Etfjord og stikker ligeledes frem i en smalere zone over det høje Tjelde-land langs den sydlige side af Ofoten ved dens udmunding i Vestfjorden.

De tilbagestaaende dele af de omhandlede landpartier vestenfor Kjældraget ere byggede af lagrækker tilhørende Tromsø glimmer-skifergruppe — et par mindre strimler ved Salten- og Skjærstadfjorden fraregnede, hvor den faste fjeldgrund dannes af lagrækker, der ere at indordne under Balsfjordens skiferafdeling.

Til nærmere belysning af disse strøgs orografiske og geologiske forholde vedlægges 3 forskellige profiler.

Der er ovenfor fremholdt at gneisgraniten antagelig ikke kan være af eruptiv oprindelse, men at den danner et med gneisafdelingen sammenhørende hele.<sup>1)</sup> At det ogsaa er tilfældet med de mindre granitiske felter ved Sjunkfjord og Rerstad synes at fremgaa af de der fremtrædende forholde. I ethvert tilfælde ere disse granitiske partier alene saa lokalt fremtrædende, at der heller ikke under forudsætning af en eruptiv oprindelse kan med hensyn til disse strøgs orografiske bygning være at tillægge dem andet end en ganske lokal betydning. Der er saaledes heller ikke noget som tyder hen paa at rejsningen af de lavere eller højere byggede fjeldpartier, der stige op vestenfor Kjeldraget, ere at tilskrive frembrud af eruptive masser.

I saa henseende maa altsaa ganske det samme forhold blive at gjøre gjeldende for Kjeldraget som for de vestenfor samme liggende fjeldpartier.

Tager man hensyn ikke alene til de rent geologiske forholde men ved siden deraf ogsaa til de orografiske forholde over de her omhandlede strøg, saa vil man neppe kunne naa til noget andet resultat, end at Kjeldraget isammen med de vestenfor samme liggende fjeldpartier danner dele under et og samme oprindelig i orografisk henseende sammenhørende hele.

Man har altsaa at efterspore andre kræfter, der have magtet ikke alene at løfte disse mægtige masser men ogsaa inden disse at fremkalde denne saa stærkt fremtrædende udsondring, hvorved fjeldpartierne vestenfor ikke alene helt ere udsondrede fra samme, men ogsaa indbyrdes splittet i en gruppe af fra hinanden udsondrede mer eller mindre selvstændige fjeldpartier.

Ser man hen til de forskellige retningslinjer, hvorefter indskjæringen er foregaaet inden de antagelig oprindelig sammenføjede masser, der nu danne fastlandsstrøgene mellem Ofoten

---

<sup>1)</sup> Se herom ogsaa «De gneisgranitiske dannelser langs det nordlige Norges kyststrøg», Geol. Fören. Förl. Stockholm 1875.

og Salten, saa vil det strax træde frem at der herunder gjør sig gjældende to lodret paa hinanden staaende hovedretninger, nemlig en nordostlig og en anden nordvestlig. Og disse retningslinjer kunne forfølges ikke alene over de her nævnte strøg men ogsaa over vidstrakte dele af det nordlige Norge.

Den nordostlige indskjæringsretning kommer tilsyne i den mægtige Vestfjord med dens indre mere østligt afbøjede forgrening Ofoten. Den træder fremdeles udpræget frem i fjelddragenes længdeudstrækning over Lofotens og Vesteraalens øer ligesom i sundløbenes retningslinje her. Den samme indskjæringslinje gjenfindes endvidere over kyststrøgene langs Tromsø amt og Vest-Finmarken, hvor fjelddragene som sundløbene fremdeles viser en hermed overensstemmende strøgretning. Men ogsaa over de nuværende fastlands strøg træder den frem i en række af dybt indskaarne, tildels ret vide ejdedannelser, ligesom ogsaa i de mange forskellige helt udsondrede fjeldpartiernes længderetning. Dette er tilfældet ikke alene i strøget mellem Salten og Ofoten men ogsaa nordover gennem Tromsø amt, — her temmelig stærkt udpræget i ethvert tilfælde til Ulfaffjord. Lyngens og Kvænangens mægtige gabbrofelter synes her at have sat en grændse for denne indskjæringsretning, men den træder dog endnu frem østenom Kvænangen. Lille Altens og Langfjordens lange indskjæring, sammenknyttet ved det lave og brede Altejde, ligger under denne hovedretning.<sup>1)</sup> Hertil kommer endvidere at selve Kjeldraget efter en hermed paa det nærmeste parallel løbende linje ligesom ogsaa dette drags vestgrændse i det hele og store følger dette løb.

Sees forholdet her i det store, saa vil der være at paavise en række parallel løbende bredere eller smalere spaltedannelser med mellemliggende højere eller lavere fjelddrag. Udmod

---

<sup>1)</sup> I forbigaaende skal her fremholdes at der heri kan ligge en udtalelse om at Lyngens og Kvænangens gabbro er skudt frem i en tid, der ligger senere end indskjæringen efter ejdernes retningslinje.

kyststrøgene ere spaltetannelserne bredere og oftest ogsaa dybere, saa de her optræde som sundløb, mens de indover den nuværende fastlandsstrækning aftager i brede som i dybde, hvorved de gaa over til ejdedannelser, indtil disse ganske afsluttes ved de sidste indskjæringer langs Kjældragets vestrand. Noget østenfor disse ejdedannelser naar fjeldmassen sin største højde i Kjældragets højryg, — saaledes som denne er fulgt i strøget fra Salten til Ofoten. Herfra skraaner fjeldmassen i regelen temmelig jævnt ned mod den bottniske bugt, uden her — saavidt vides — at være spaltet gennem dybere indskjæringer efter denne nordøstlige retning.

Den nordvestlige indskjæringslinje træder frem i den talrige række af fjordløb, der i strøget fra Sørfolden nordover til Magerøundet skjær sig ind i den nuværende fastlandsstrækning og herfra videre bryder sig ind ogsaa gennem det egentlige Kjældrag dels som fortsatte fjordløb og dels som dalløb og fjeldrevner. Disse fjeldspaltninger afsluttes i strøget fra Salten til Ofoten vestenfor Kjældragets egentlige højryg, mens de i strøget nordefter oftere som saakaldte «aabne dalfører» helt gennemskjær det egentlige højfjeld. Paa svenak side — altsaa østenfor højryggen — gjenfindes de i den række af anseelige dalløb, der fra rigsgrænsen eller op imod denne skyde sig ned mod den bottniske bugt i sydøstlig retning. Den samme indskjæring træder ogsaa frem i de hyppige smaa fjorde, som efter denne retning skyde sig ind fra den ytre side af kyststrækningens øer. Fra Saltenfjord derimod — der selv skjær sig ind paa det nærmeste i vest-østlig retning — og sydover gennem et længere strøg antager fjordløbene en mere bestemt vest-østlig strøgetretning.

Med hensyn til den inden gneisafdelingen og Tromsø glimmerskifergruppe raadende lagstilling saa vil man finde at strøgetretningen over de her omhandlede fjelddrag mellem Salten og Ofoten er regelmæssig nord-sydlig oftest dog med afbøjning mod nordøst. Faldvinkelen viser sig derimod regelmæssig vex-

lende — over bredere eller smalere zoner snart med østlig snart med vestlig indskyden. Lagstillingen optræder saaledes her med udprægede foldninger.

At ejdedannelserne og sundløbene — eller rettere de indskjæringslinjer, hvorefter disse ligge udspændte — maa være et resultat af de samme kræfter, der have hidført fældningerne, derfor synes der at være al rimelighed.

Der er ovenfor paavist at lagstillingen langs det store granitiske parti i virkeligheden synes at staa i et bestemt forhold til granitdraget, idet den bøjer sig efter dettes grændselinjer, det vil sige: Glimmerskiferen viser en strøgretning parallel granitdragets længdeudstrækning, mens faldet langs vestgrænsen under en stejl vinkel enten er fra graniten eller ind under samme. Dette forhold synes at skulle tale til fordel for en forudsætning om at lagstilling og foldning over de her omhandlede strøg nærmest er at tilskrive granitens frembrud. Der er imidlertid ovenfor fremholdt at der ere forholde at aflæse, der med maaske ligesaa stor styrke vidner imod granitens eruptive oprindelse. Og i ethvert tilfælde saa skal det her ikke oversees at den samme strøgretning, som er raadende inden landpartierne mellem Salten og Ofoten, ogsaa er den der i regelen træder frem over fjeldpartierne inden Tromsø amt — over strøg, der ere saa langt fjernede fra Saltens Kjelgranit, at der end ikke kan være den fjerneste grad af sandsynlighed for at den i saa henseende skulle kunne have udstrakt sine virkninger saa langt udover sit egentlige omraade. Den over disse strøg raadende lagstilling maa derfor utvivlsomt være et resultat af andre kræfter, end de, der ere at tilskrive frembrudet af eruptive masser.

Med hensyn til spørgsmaal om den tid, hvorunder de kræfter have virket, der have tildelt de her omhandlede landstrøg sin ejendommelige orografiske karakter, saaledes som den træder frem i fjelddragenes strøgretning, i sundløbene og ejdefarene, saa peger alt hen paa at disse kræfter maa have afsluttet

sin virksomhed eller dog i saa henseende udrettet sit væsentligste arbejde allerede i de ældste geologiske tidsperioder. Og dette antages at skulle fremgaa under hvilkensomhelst forudsætning man og maatte slutte sig ligeoverfor spørgsmaalet om Kjelgranitens oprindelse.

Er den omhandlede Kjelgranit af eruptiv oprindelse og de her omhandlede orografiske forhold saaledes som de ere betingede ved lagstilling og foldning væsentlig et resultat af dennes frembrud, saa er dette nu vel i ethvert tilfælde givet. For Kjelgranitens aldersforhold foreligger der for tiden vel ingen afgjørende bestemmelse. At den er yngre end Tromsø glimmerskifergruppe fremgaar af at den gjennembryder sammes lagrækker. En nærmere tidsbestemmelse frem over kan maaske være at finde deri at lagrækkerne inden de smaa partier af Balsfjordens skiferafdeling øjensynlig have være uberørte af de kræfter, der have indvirket bestemmende paa lagstillingen inden glimmerskifergruppen. Kjelgranitens aldersgrænse ligger saaledes antagelig mellem glimmerskifergruppens og Balsfjordfeltets aflejning. Hertil kommer endvidere at disse strøg helt og holdent ere byggede af disse ældre krystallinske lagrækker medens samtlige sekundære og tertiære formationsgrupper — en liden lokal juraafdeling paa Andø yterst ud mod kyststrækningen alene fraregnet — ere ganske urepræsenterede over hele det nordlige Norge. Fjeldpartierne inden disse strøg maa saaledes gennem det hele tidsrum fra den sekundære tid nedover have ligget over havfladen. Lagstillingen og foldningen maa i det væsentlige antagelig være et resultat af de kræfter, der have skudt disse fjeldpartier i vejret, og er dette at tilskrive graniten, saa maa dennes frembrud ligge bagenfor den sekundære tid.

Er kjelgraniten derimod ikke eruptiv og de kræfter, der have været de virkende til at fremkalde de orografiske forhold, der nu træde frem over disse landstrøg, saaledes heller ikke kan være at tilskrive frembrudet af eruptive masser, saa ville

frøndeles de nys nævnte hensyn ogsaa her blive at gjøre gjeldende. Ikke alene have disse landstrøg fra den sekundære tid ned over ligget over havfladen men alt synes ogsaa at vidne om at den faste fjeldgrund her gennem disse tidsrum helt ned til vor tid ikke kan have været udsat for indvirkningen af kræfter, der have virket forstyrrende paa bergbygningsforholdene i det hele og store.

Lagstillingen inden Balsfjordens skiferafdeling peger endvidere hen paa at lagstillingen inden glimmerskifergruppen i det væsentlige maa være ordnet som den nu træder frem forinden Balsfjordskiferens aflejning.

Ogsaa saaledes maa de nu fremtrædende forholde i landets orografiske bygning navnlig med hensyn til fjelddragenes hovedstrøg, sundløbenes og ejdeløbenes dannelse — der i større og mindre grad er betinget af lagstilling og foldningerne — være at føre tilbage til tidsperioder, der ligge bagenom den sekundære tid. Den stigning af den faste fjeldgrund, der har fundet sted gennem kvartærtiden, er sammenlignelsesvis ringe og er desuden foregaaet langsomt og jevnt. Ligesom der paa forhaand er liden sandsynlighed for at denne skulde kunne have fremkaldt saa stærkede resultater, saa er der heller ikke hidtil aflæst endog det svageste vidnesbyrd, der skulde synes at kunne pege i denne retning.

Ikke fuldt saa klart synes forholdet at stille sig med hensyn til spørgsmaalet om fjordløbenes dannelsesetid eller rettere om tiden for indskjæringerne efter de nuværende fjordløb. Som før nævnt skjær disse sig ind efter en retning, der peger paa det nærmeste lodret mod ejdefarene og overakjær saaledes skifergruppens lagrækker under en ret vinkel mod den inden samme raadende strøgretning. De kræfter, der have dannet fjordløbene, have saaledes ikke indvirket bestemmende med hensyn til lagstillingen og end ikke i fjerneste grad indvirket forstyrrende paa samme selv inden det nærmeste omraade. Det er saaledes al grund til at forudsætte at fjorddannelsen ikke kan

være at tilskrive voldsommere spaltedannende kræfter, der have traadt i virksomhed efter at glimmerskifergruppens lagrækker vare tildelte den lagstilling, hvorunder de nu træde frem. I saa tilfælde maatte dog spaltedannelsen utvivlsomt have indvirket i nogen grad forstyrrende paa nævnte lagstilling.

Forsaaavidt altsaa fjorddannelsen efter den omhandlede retningslinje fra NV til SO skulde være at tilskrive saadanne spaltedannende kræfter maa deres virketid antagelig være at føre tilbage til et tidsrum, der ligger bagenom foldningskræfternes virketid. En mulighed kunde der dog maaske være for at de kunde være samtidige med foldningerne.

Skulde derimod spaltedannelsen efter fjordløbenes hovedretning være at henhøre til et senere tidsrum end tiden for lagrækkernes foldning, saa kan det ikke have været voldsomme men derimod jevnt og langsomt virkende kræfter, der herunder have øvet sit spil. Saadanne kunne søges enten i nedslagets og atmosfæriernes stadige indvirkning eller i nedglidende ismassers udgravning gennem glacialtiden. Hvad de første angaar, saa er der nu allerede i og for sig liden rimelighed for at de alene skulde have udført saa mægtige arbejder. Anderledes stiller visselig forholdet sig ligeoverfor spørgsmaalet om isens virkeevne under glacialtiden. Forudsætningen om at fjorddannelsen væsentlig er at henhøre til glacialtiden holdes jo ogsaa frem af ikke faa anseede videnskabsmænd. Det skal ogsaa paa forhaand villigen indrømmes at den, om den end ikke ligefrem er betinget af glacialtiden, dog netop gennem denne oftere kan være bleven væsentlig modificeret.

Der er nemlig et forhold, der — som det synes temmelig afgjørende — taler mod at fjorddannelsen i det væsentlige kan være et resultat fra glacialtiden. I dette tilfælde maatte nemlig de nu ved fjordløbene transversalt mod strøgretningen gennemskaarne lagrækker forinden glacialtiden have løbet sammen tværs over fjordløbene. Og samtidig maatte saaledes ogsaa de nu gennem fjordløbene afskaarne fjeldpartier have staaet i indbyrdes



forbindelse over disse som sammenhængende fjelddrag. Landpartiet fra Salten nordover maatte saaledes have dannet en rad af flere paa hinanden følgende fjelddrag, som adskilte ved mellemliggende dybe indsænkninger har skudt frem paa det nærmeste parallel med Kjeldragets grændselinje, — det ene altsaa udenfor det andet. Over de forskjellige her fremspringende halvøer vil der i regelen være tre saadanne hoveddrag at paavise. Naar hensyn tages til de glidende ismassers udgravende evne, vilde der antagelig intet være til hinder for at forudsætte at ismasser, der gled ned fra et højfjeldsparti over skraaninger, der seet i det store altid førte ned til samme side, maatte kunne udføre de mest storartede udgravninger — naar de dertil hjemledes den fornødne tid. Vanskeligere vilde det derimod vel blive at forstaa, hvorledes flere paa hinanden følgende fjelddrag derunder skulde kunne gennemskjæres transversalt saaledes at der dannodes sammenhængende fjordløb. De fra fjeldhøjderne ned til de longitudinale indsænkninger nedskudte ismasser maatte enten glide frem over disse efter deres længderetning eller naar denne nedgliden her mødte uovervindelig modstand, maatte selve indsænkningen udfyldes med is i stadigt voxende maal. Naar disse ismasser vare voxede op over højden af den første med Kjeldraget parallelt løbende højryg, kunde de saaledes højest fremskudte ismasser komme til at skyves henover denne og videre vestover sammes afhæng — men i det hele og store taget kunde indlandsisen ikke deltage i denne stadig fortsatte udgliden vestover, forinden samtlige fjelddrag vare gennemskaarne. Fjorddannelsen kunde altsaa her alene — som det synes — tænkes foregaaet saaledes, at de ismasser, der skjød ned fra det nærmest kysten liggende fjelddrag, først dannede en liden fjord opimod fjelddragets ytre afhæng, at saa fjelddragets højryg her blev gennemgravet og jævnet til en dybde, der nogenlunde svarede til bundhøjden i den første longitudinale indsænkning og at fjorddannelsen saaledes videre trak sig indover herfra, gjennembrydende den ene

højryg efter den anden. Mod en saadan forudsætning er der nu for det første at indvende at saa let det ogsaa er at forstaa at nedglidende ismasser ville kunne udhule smalere eller bredere render enten som dal- eller fjordløb nedover fjelddragets underland ligesom ogsaa over dets afhæld, ligesaa vanskeligt vilde det vel blive at danne sig et nogenlunde klart begreb om, hvorledes selve højfjeldet skulde kunne gjennejskjæres efter en maalestok som her udfordres. En højryg maa dog altid — som det synes — blive staaende igjen.

Men selv om det skulde findes at de her fremkastede tvivl ikke var at tillægge nogen vægt, saa synes dog det umaadelige tidsrum, der vilde udfordres til en saa storartet udgravning, at maatte egne sig til at vække en betænkelighed ved at fæste sig til en forudsætning om en fjorddannelse her ad nævnte vej.

Naar fjorddannelsen saaledes skal trække sig skridt for skridt udenfra indad og derunder samtidig gjennejskjære en rad af høje fjelddrag, saa er der vel al rimelighed for at udgravninger her maa udfordre et tidsrum, der voxer i et langt stærkere forhold end antallet af de fjelddrag, der skulde gjennejskjæres.

I en afhandling «On the action of denuding agencies»<sup>1)</sup> udtaler Alfred Tylor sig blandt andet saaledes: «If the mean depth of the lake of Zurich could be increased half an inch in a year that lake might have been comfortably excavated 15000 years, wick is certainly less than the glacial periode.»

Sættes den midlere fjeldhøjde, der her maatte gjennejskjæres i de forskjellige fjelddrag til 2000' og antallet af disse longitudinale fjelddrag til 3, saa vilde der under forudsætning af en  $\frac{1}{2}$  tommes ensartet aarlig udgraven udfordres et tidsrum for hvert enkelt fjelddrag af 48000 aar eller for samtlige tre drag 144000 aar. Først naar disse vare gjennejskjæret, kunde

<sup>1)</sup> Geological Magazine, 1875.

dannelsen af de dale, der fra fjordbundene skyde ind over Kjøldraget, tage sin begynden efter det fulde aarlige forholds-  
tal. Her vil der mindst blive tale om 3000' udgravning i lodret dybde — hertil udfordres 72000 aar. Hertil kommer endvidere dybden af ferskvande, hvis bund stikker ind under havfladen ligesom fjordløbenes dyb, der ikke saa sjældent naa ned til 400 favne eller 2400' — ogsaa disse udgravninger tilskrives jo glacialtiden. Disse 2400' vilde udkræve 57600 aar. Samlet vil her altsaa blive at føre i regning et tidsrum af omkring 270000 aar. Og naar alle momenter her skulle medtages i beregningen, vilde totalbeløbet rimeligvis komme til at stilles adskillig højere. Men selv med betydelig reduktion maatte glacialtidens varighed efter dette mindst blive at beregne til omkring 200000 aar.

Det skal villigen indrømmes at hensyn til tid her ikke kan være det afgørende. Men det maa dog altid, navnlig naar det trækkes ud over saa vide grændser som tilfældet er her, være et moment, hvortil der bør tages hensyn. Og her saameget mere som der — som ovenfor fremholdt — er andre forholde at aflæse som synes med ikke ringe styrke at tale imod berettigelsen af en forudsætning om at fjordløbene her kunne være væsentlig et resultat af glaciale kræfter.

Foruden hvad der her er fremholdt er der ogsaa forskellige andre forholde aflæste i strøget fra Kvænangen til Salten, som ligeledes pege frem i den retning at fjordløbene her i det hele og store ikke kunne være at tilskrive glacialtiden. Det er imidlertid ikke her stedet til nærmere at gaa ind paa behandlingen heraf. Maaske vil der senere findes anledning til i en egen afhandling nærmere at søge disse spørgsmaal belyste.

Det antages altsaa at kunne holdes frem at det ikke kan have været denuderende eller udgravende, men derimod hævede eller sænkende kræfter, som her have virket til at spalte fjeldpartierne efter en retning, der løber lodret paa den over

disse strøg raadende strøgetning inden lagrækkerne og tillige lodret paa kyststranden. Det skal endvidere fremholdes at de herunder virkende kræfter rimeligvis ere at henhøre til en tid som enten ligger foran eller er at sætte samtidig med lagrækkernes foldning. At hævede kræfter under de landgrundens niveauforandringer, der have fundet sted gennem kvartærtiden, i nogen mon kan have indvirket paa lagrækkernes lagstilling skal indrømmes, — at de vigtigste forandringer fra den oprindelige lagstilling i ethvert tilfælde ere ældre end glacialtiden antages i ethvert tilfælde at kunne sættes som givet.

Men under disse forudsætninger ere fjordløbene med sine nu sammenhængende fjordlinjer et resultat ikke af udgravende men af hævede kræfter. Sundløbene mellem de tidligere ølegemer ere gennem landets stigning gaaede over til ejder og derunder knyttede sammen til sammenhængende halvøer. Men i saa henseende har glacialtidens fremglidende ismasser utvivlsomt her øvet en betydningsfuld indvirkning. Ismasserne fra Kjeldragets højfjeld har kunnet skyde sig ud mellem øerne gennem de løb, der førte ud til kyststrøget. De kunne derunder muligens ogsaa have skudt sig ned under havfladen og skuret bunden og saaledes her dannet en modvægt mod landgrundens stigning. Ismasserne kunne saaledes have bidraget til at holde fjordløbene aabne og maaske ogsaa tildele dem den ofte saa anseelige dybde de nu have inden de indre og midtre partier — en dybde der her ofte kan gaa ned til 400 favn, mens dybden udenfor kan synke ned til 200, 100 favn og derunder. Saaledes seet er fjorddannelsen med sine sammenhængende fjordlinjer i regelen udgaaet fra kvartærtiden og under forudsætning om landgrundens vedblivende stigning er fjorddannelsen fremdeles i virksomhed over de strøg, hvor øer dukker op udenfor fastlandsstrækningen langs fjordløbenes retningsstrøg.

Ogsaa til ejdedannelsen, der ligeledes er et resultat af

landgrundens stigning, kan de fremskydende ismasser forsaavidt ogsaa i nogen mon have givet sit bidrag, som de langs de tidligere sundløbs udmunding mod fjordløbene kan have sammenhobet masser af det ovenfra medbragte løse skuringsmateriale, som derpaa gennem sidestrømningen kan være ført indover de langsomt stigende sundløb.

At forholdet med hensyn til fjorddannelsen i det væsentlige maa være dette synes yderligere at skulle finde sin bestyrkelse deri at fjordløbene i regelen ender ved Kjældragets vestlige afhæng eller højst skyder ind gennem dette med sine inderste botner. Af de mere anseelige fjordløb er det alene Hellemobotten, der gennem en noget længere strækning skyder sig ind gennem det egentlige Kjældrag.

---

**OM INDFLYDELSEN AF BANENS EXCENTRICITET PAA  
DEN VARMEMÆNGDE, SOM ET HIMMELLEGE  
MODTAGER FRA SOLEN.**

AF

H. GEELMUYDEN.

Den Styrke, hvormed en Planet eller Komet i et givet Øieblik belyses og opvarmes af Solen er omvendt proportional med Kvadratet af Afstanden fra samme. Betegner altsaa  $r$  denne Afstand, saa er  $\frac{dt}{r^2}$ , paa en Constant nær, Udtrykket for den Styrke, hvormed Planeten opvarmes i Tids-elementet  $dt$ , eller for den i samme Tid modtagne Varmemængde. Da det her ikke gjelder at faa denne udtrykt i noget absolut Maal, saa kan Constanten, som er afhængig af Solens Evne til at udstraale Varme og Planetens Evne til at modtage den, gjerne sættes ud af Betragtning, eller sættes = 1; kun forudsættes naturligvis, at de her medvirkende Omstændigheder ikke i nogen mærkbar Grad forandre sig med Tiden, eller med andre Ord, Udtrykket  $\frac{dt}{r^2}$  betegner den Varmemængde, som en Planet i Afstanden  $r$  under forøvrige lige Omstændigheder hvad den fysiske Beskaffenhed angaar, modtager fra Solen i Tiden  $dt$ .

Nogen Sammenligning mellem forskellige Himmelleger, selv om de bevæge sig om den samme Sol, kan ikke anstilles paa denne Maade, da det er meget muligt, endog sandsynligt, at de forskellige Planeters Evne til at tilgodegjøre den fra Solen udstraalede Varme er meget forskellig; det er vel især Atmosfærerne, som i saa Henseende spille en Rolle. Derimod er det fuldt berettiget at integrere ovennævnte Udtryk for at finde den Varmemængde, som et og samme Himmellegeme modtager i en endelig Tid. For kortere Tider gjelder dette utvivlsomt; for særdeles lange Tider bliver det mere usikkert, thi selv om man i et langt Tidsrum kunde forudsætte Solens Udstraalingsevne uforandret, er det ikke sagt, at det samme kan siges om Planetens Evne til at optage Varmen i sig; skal man f. Ex. gaa tilbage i Tiden for Jordens Vedkommende, saa vil man vel tilsidst træffe paa et Øieblik, da Jordens egen indre Varme har havt en mærkbar Indflydelse paa dens Overflades fysiske Beskaffenhed, noget som den nu ikke kan siges at have. Hvor man i saa Henseende skal sætte Grænsen, eller hvor langt man kan gaa, uden at Varmeconstanten ophører at være uforanderlig med Tiden, er naturligvis umuligt at afgjøre; det faar bero paa et Skjøn eller rettere sagt paa en vilkaarlig Antagelse.

For at integrere  $\frac{dt}{r^2}$  kan man benytte den 2den Keplerske Lov, at Fladehastigheden er constant. Betegner  $u$  den sande Anomali eller Radius vectors Vinkel med Axen, regnet fra Perihel, saa er den dobbelte Fladehastighed

$$r^2 d_1 u = k \sqrt{p}$$

hvor  $p$  er Keglesnittets halve Parameter,  $k$  en for alle om Solen gaaende Himmelleger constant Størrelse, den saakaldte Gravitationsconstant. Strengt taget skulde der under Rodtegnet være tilføjet Factoren  $1+m$ , hvor  $m$  er Planetens Masse udtrykt som Brøkdel af Solens; men for alle Plane-

terne og endnu mere for Kometerne er denne Factor saa lidet forskjellig fra 1, at den her kan betragtes som gaaende ind i Constanten  $k$ .

Denne Ligning giver altsaa  $\frac{dt}{r^2} = \frac{du}{k\sqrt{p}}$ , hvoraf naar Tiden antages at begynde, idet Himmelleget er i Perihel,

$$\int_0^t \frac{dt}{r^2} = \frac{u}{k\sqrt{p}} = \frac{u}{k\sqrt{a(1-e^2)}} \dots \dots (1)$$

naar  $a$  er Middellafstanden fra Solen (den halve Storaxe) og  $e$  Banens Excentricitet. Dette er altsaa Udtrykket for den i Tiden  $t$  modtagne Varmemængde; den er ligefrem proportional med den af Radius vector gjennemløbne Vinkel. Jorden modtager f. Ex. lige megen Varme i Sommerhalvaaret og i Vinterhalvaaret, naagtet det første er næsten 8 Dage længere end det sidste.

Den under et helt Omløb ( $T$ ) modtagne Varmemængde  $V$  findes ved at sætte  $u = 2\pi$ ; da efter den 3die Keplerske Lov  $T = \frac{2\pi}{k} \cdot a^{\frac{3}{2}}$ , saa bliver

$$V = \frac{2\pi}{k\sqrt{a(1-e^2)}} = \frac{T}{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-e^2}} \dots \dots (2)$$

Paa Grund af de gjensidige Perturbationer har enhver Planets eller Komets Bane foranderlige Elementer; kun Middellafstanden og følgelig ogsaa Omløbstiden er fri for seculære Perturbationer ved Hovedplaneterne. Udtrykket for  $V$  indeholder altsaa ingen anden foranderlig Størrelse end Excentriciteten; naar denne under Integrationen i Lign. (1) blev betragtet som uafhængig af Tiden, saa er derved ingen mærkbar Feil begaaet, saalænge man kun søger Varmemængden for en kortere Tid f. Ex. Omløbstiden; thi ved alle Planeterne foregaar Excentricitetens Forandring meget langsomt. Selv for Uranus og Neptun, hvis Omløbstider ere 84 og 164 Aar, gjeldet dette, da deres Excentriciteter tilfældigvis forandre sig endnu langsommere end de øvrige Planeters.



Den i Løbet af Omløbstiden modtagne Varmemængde er altsaa foranderlig paa den Maade, at den er desto større, jo større Excentriciteten er; den cirkelformige Bane er altsaa i saa Henseende den mindst fordelagtige. (Da Ellipsens lille Halvaxe  $b = a\sqrt{1-e^2}$ , saa kan man ogsaa sætte  $V$  under Formen  $\frac{T}{ab}$ , eller den aarlige Varme er omvendt proportional med den lille Axe, saalsænge den store er uforandret). I hvilken Grad Excentricitetsforandringen virker, sees ved at differentiere Lign. (2), nemlig

$$dV = \frac{T}{a^2} \cdot \frac{e de}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

altsaa Forholdet mellem Forandringen og Varmemængden selv

$$\frac{dV}{V} = \frac{e de}{1-e^2} \dots \dots \dots (3)$$

Anvendes dette paa Jorden, saa er, som bekjendt, Jordbanens Excentricitet for Tiden aftagende, hvoraf følger, at Jorden Aar for Aar modtager mindre Varme fra Solen. Indsættes Talværdierne for  $e$  og  $de$ , kan man finde hvormeget (eller, om man hellere vil, hvor lidet) dette beløber sig til. Ifølge Le Verriers Undersøgelser (Annales de l'Observatoire de Paris, Tome XI) er

$$e = 0.0167727 - 0.000\ 000\ 4271\ t - 0.000\ 000\ 000\ 0137\ t^2$$

hvor  $t$  betyder Aarstallet minus 1850; altsaa

$$d_e e = -0.000\ 000\ 4271 - 0.000\ 000\ 000\ 0274\ t.$$

For Tiden er altsaa  $de = -0.000\ 000\ 428$  om Aaret, hvoraf

$$\frac{dV}{V} = -0.000\ 000\ 00\ 718.$$

Det er altsaa kun en yderst ringe Del af sin egen Værdi, som den aarlige Varmemængde taber for hvert Aar; men det maa erindres, at Tabet for det første er stigende (da Excentricitetsforandringen er tiltagende) og for det andet, at det dynger sig sammen i Tidens Løb; det er ikke en Formind-

skelse af Kapitalen, men af den aarlige Indtægt. Den Varmemængde, som Jorden i Aarets Løb modtager, gaar med til Vedligeholdelse af Luftens og Jordbundens Temperatur, til Havets Omdannelse til Skyer, Regn, Elve, til Opholdelsen af vegetabilsk og dyrisk Liv, o. s. v.; den øieblikkelige Tilstand er ikke alene afhængig af den øieblikkelige aarlige Tilførsel, men ogsaa af Tilførselen før i Tiden; naar da i en lang Række af Aar (her tales naturligvis ikke om historiske Perioder, om Aarhundreder, men om Aartusinder) Tilførselen stadig formindskes, saa kan «status quo» ikke vedligeholdes med det sammendyngede Tab.

Der er et bekjendt astronomisk Fænomen, som minder om det her omtalte, og som tilmed har den samme Aarsag, nemlig den saakaldte seculære Acceleration i Maanens Middelbevægelse. Den viser sig paa den Maade, at Maanens Omløbstid for hvert Aar bliver lidt kortere, rigtignok yderst ubetydeligt; thi Forskjellen mellem Omløbstiden nu og paa den Tid, da de os bekjendte astronomiske Observationer begyndte, d. e. for ca. 2000 Aar siden, er ikke mere end  $\frac{1}{4}$  Sekund eller 0.000 000 212 af Omløbstidens egen Værdi. Ikke desto mindre er dette en Perturbation, som bestandig maa medtages ved Beregningen af Maanens Plads, og som, da den dynger sig sammen, bliver særdeles mærkbar ved gamle Solformørkelser, f. Ex. den, som indtraf under Slaget ved Stiklestad. Maaned for Maaned gaar Maanen rundt om Jorden, stadig lidt hurtigere, saa at den efter Forløbet af en vis Tid, f. Ex. 1000 Aar, er kommen længere frem i sin Bane, end den vilde være, om der ingen seculær Acceleration var; Aar for Aar udfører Solens Varme sit Arbejde paa Jorden, stadig lidt mindre, saa at Jorden ved Enden af de 1000 Aar maa befinde sig paa et i denne Henseende mindre fremskredent Standpunkt end ved Begyndelsen. Som bekjendt har Secular-Accelerationen ogsaa sin Grund i Aftagelsen af Jordbanens Excentricitet. — Til Fuldførelse af Sammenligningen

hidsættes Forskjellen mellem den aarlige Varmemængde, som Jorden modtager nu og som den fik for 2000 Aar siden; var nemlig Excentriciteten dengang  $e'$  og Varmemængden  $V'$ ,

saa er efter Lign. (2)  $V' - V = \frac{T}{a^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-e'^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right)$

og  $\frac{V'-V}{V} = \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e'^2}} - 1 = (1 - \frac{1}{2}e^2) (1 + \frac{1}{2}e'^2) - 1 =$

$-\frac{1}{2}(e' - e)(e' + e)$ , naar de umærkelige Led af høiere Orden bortkastes. Beregnes nu efter Formelen pag. 441 Excentriciteten for 2000 Aar siden, saa faaes  $e' = 0.017572$

medens  $e = 0.016773$ ; indsættes dette, faaes  $\frac{V'-V}{V} = 0.0000137$ ,

eller Forskjellen mellem Jordens aarlige Varmemængde for 2000 Aar siden og nu, udtrykt i Dele af dens egen Værdi, er 65 Gange større end Forskjellen mellem Maanedens Længde paa de samme Tider og udtrykt paa samme Maade.

Forøvrigt kan Tingen ogsaa udtrykkes paa en anden Maade, som har den Fordel, at man undgaar de mange Nuller, der besværliggjøre Oversigten. Da nemlig Varmemængden er omvendt proportional med Kvadratet af Afstanden, saa kunde man tænke sig den ved Excentricitetsformindskelsen forårsagede Formindskelse i Varmen frembragt paa den Maade, at Excentriciteten holdt sig uforandret, men Middelafstanden blev større. Det er da let at beregne, hvor stor Forsøgelse af Afstanden der maatte til for at ækvivalere en given Formindskelse af Excentriciteten; man behøver blot i Lign. (2) at betragte  $a$  som variabel,  $e$  som constant og differentiere logarithmisk med Hensyn paa  $a$ , samt sætte den derved fundne Værdi for  $\frac{dV}{V}$  lig Værdien i Lign. (3), saa

har man en Ligning mellem  $\frac{da}{a}$  og  $\frac{de}{e}$ , hvoraf den første kan findes, naar den sidste er givet. Benytter man Udtrykket

$V = \frac{2\pi}{k\sqrt{a(1-e^2)}}$ , hvor Omløbstiden ikke forekommer, saa

faaes  $\frac{dV}{V} = -\frac{1}{2} \frac{da}{a} = \frac{e de}{1-e^2}$ , altsaa  $\frac{da}{a} = -2 \frac{e de}{1-e^2}$ ; men da

dette Udtryk kun gjælder for Omløbstiden, som forandrer sig med Middellafstanden, saa har man derved sammenlignet Varmemængder, som ere modtagne i ulige store Tider, hvilket ikke er Meningen. Nærmere Sandheden kommer man ved at

differentiere Udtrykket  $V = \frac{T}{a^3 \sqrt{1-e^2}}$ , saaledes at  $T$  be-

tragtes som constant, hvorved faaes  $\frac{dV}{V} = -2 \frac{da}{a}$ , altsaa

$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2} \frac{e de}{1-e^2}$ ; herved har man vistnok sammenlignet lige-

store Tider, men da  $T$  ikke længer betegner Omløbstiden,

naar  $a$  forandres, saa ophører ved Differentiationen  $\frac{T}{a^3 \sqrt{1-e^2}}$

at være et korrekt Udtryk for Varmemængden; Forskjellen er imidlertid saa liden, at den ofte vil kunne sættes ud af Betragtning (som kan sees nedenfor). Det mærkeligste er at gaa tilbage til Lign. (1), der giver den Varmemængde  $v$ , som Planeten har modtaget, naar Radius vector har gennem-

løbet Anomalien  $u$ , nemlig  $v = \frac{u}{k \sqrt{a(1-e^2)}}$ ; naar  $a$  under-

gaar en liden Forandring, saa er  $u$  efter Forløbet af Tiden  $T$  ikke lig  $2\pi$ , men en liden Smule forskjellig derfra. Differentieres logarithmisk, faaes

$$\frac{dv}{v} = \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \frac{da}{a} \dots \dots \dots (4)$$

For at faa  $du$  udtrykt ved  $da$ , benyttes de bekjendte Forbindelser mellem den sande Anomali og Tiden (Ligningerne for Keplers Problem), nemlig, naar  $t$  er den til Anomalien  $u$  svarende Tid,

$$kt \cdot a^{-\frac{3}{2}} = E - e \sin E \dots \dots \dots (5)$$

hvor  $E$  er den saakaldte excentriske Anomali, defineret ved Ligningen

$$\operatorname{tang} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tang} \frac{u}{2},$$

hvoraf igjen findes  $\cos E = \frac{e + \cos u}{1 + e \cos u}$ ,  $\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin u}{1 + e \cos u}$ ,

og  $dE = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 + e \cos u} \cdot du$ . Differentieres nemlig Lign. (5) naar

$t$  betragtes som constant,  $a$  og  $E$  som variable, saa faaes, naar Værdierne af  $E$  og  $dE$  indsættes

$$- \frac{3}{2} kt \cdot a^{-\frac{5}{2}} da = (1 - e \cos E) dE = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e \cos u)^2} \cdot du$$

Naar nu  $t = T$ , saa er  $u = 2\pi$  og  $v = V$ , altsaa

$$du = - \frac{3}{2} k T \cdot a^{-\frac{5}{2}} \frac{(1+e)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} da = - 3\pi \cdot \frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{da}{a},$$

da  $k T \cdot a^{-\frac{3}{2}} = 2\pi$ . Indsættes dette i Lign. (4), faaes

$$\frac{dV}{V} = \frac{du}{2\pi} = - \frac{1}{2} \frac{da}{a} = - \frac{1}{2} \left( 1 + 3 \frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^2} \right) \frac{da}{a},$$

og ved Hjælp af Lign. (3)

$$\left( 1 + 3 \frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^2} \right) \frac{da}{a} = - \frac{2e de}{1-e^2}.$$

Istedetfor at benytte denne nøiagtige Ligning, er det bekvemmere at udvikle efter Potentserne af  $e$ , hvorved faaes

$$\frac{da}{a} = - \frac{1}{2} e de (1 - \frac{3}{2} e + \frac{15}{8} e^2 - \dots) \dots \dots (6)$$

hvor allerede 2den Potents i Regelen vil blive uden Betydning for Resultatet. Forskjellen fra det ovenfor fundne tilnærmede Udtryk ( $-\frac{1}{2} e de$ ) er saaledes ikke betydelig.

Anvendes dette paa den nuværende Tilstand af Jordbanens Excentricitet, saa indsættes  $e = 0.01677$  og den aarlige Forandring  $de = - 0.000\ 000\ 428$ , hvoraf findes

$$da = 0.000\ 000\ 0035 \quad a = 0.07 \text{ Mile} = 1680 \text{ Fod},$$

d. e. den nuværende Aftagelse af Jordbanens Excentricitet

har samme Indfyldelse paa den aarlige Varmemængde, som om Jorden aarlig fjernede sig 1680 Fod fra Solen.

Paa samme Maade kan man finde, hvor stor Forandring af Middelaafstanden, der svarer til Forskjellen mellem to givne Værdier af Excentriciteten. Gaar nemlig denne efterhaanden over fra  $e$  til  $e'$ , saa bliver den aarlige Varmemængde

$V' = \frac{2\pi}{\sqrt{a(1-e'^2)}}$ . Tænker man sig den samme Varmerodtaget, naar Excentriciteten havde beholdt sin Værdi  $e$ , men Middelaafstanden var gaaet over fra  $a$  til  $x$ , saa findes  $x$  af Ligningen

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a(1-e'^2)}} = \frac{2\pi + \Delta u}{\sqrt{x(1-e^2)}} \text{ eller } \sqrt{\frac{x(1-e^2)}{a(1-e'^2)}} = 1 + \frac{\Delta u}{2\pi},$$

hvor  $2\pi + \Delta u$  betegner den fra  $360^\circ$  lidet forskjellige Vinkel som Radius vector har gennemløbet i Tiden  $T$ , der er Omløbstid svarende til Afstanden  $a$ , men ikke til  $x$ . Istedetfor  $\Delta u$  kan man indsætte den ovenfor fundne Værdi af  $du$ , naar man istedetfor  $da$  skriver  $x-a$ , nemlig

$$\Delta u = -3\pi \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2} \cdot \frac{x-a}{a}, \text{ altsaa}$$

$$\sqrt{\frac{x(1-e^2)}{a(1-e'^2)}} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2} \left( \frac{x}{a} - 1 \right).$$

Søges  $\frac{x}{a}$  (eller  $\frac{x}{a} - 1$ ) af denne Ligning, og udvikles i Række efter Potentserne af  $e$ , faaes

$$\frac{x-a}{a} = \frac{(e-e')(e+e')}{4} \left\{ 1 - \frac{3}{2}e + \frac{1}{8}(49e^2 + 39e'^2) \dots \right\} \dots (7)$$

Sammenlignes f. Ex. Tilstanden nu og for 2000 Aar siden, saa faaes

$$x-a = -0.000\,00687\,a = -137 \text{ Mile,}$$

eller Jorden modtog for 2000 Aar siden den samme Varmerodtaget som den nu vilde faa ved at komme Solen 137 Mile nærmere.

Den ovenfor benyttede Formel for Jordbanens Excentricitet, udtrykt ved Hjælp af Aarstallet, gjelder naturligvis

ikke for bestandig, da Excentriciteten ikke kan aftage til evige Tider; efter Forløbet af ikke ret mange Aartusinder (før og efter Nutiden) bliver den ugyldig. Le Verrier har i sine Undersøgelser over Planetsystemets Stabilitet (2det Bind af *Annales de l'Obs. de Paris*) fundet en Række Ligninger, hvoraf man skulde kunne beregne Planeternes Bane-Elementer for hvilkensomhelst Tid, og han har udført Beregningen for hvert 10de Aartusinde indtil 100000 Aar før og efter vor Tid. Herved er imidlertid to Ting at bemærke, nemlig at Beregningen skriver sig fra en Tid, da Planeten Neptun endnu ikke var opdaget, hvad der selvfølgelig ikke er uden Indflydelse paa Resultatet, selv for Jordens Vedkommende, og at de paa den Tid antagne Værdier af de øvrige 7 Planeters Masser ere forskellige fra, hvad der fremgaar af senere Undersøgelser af Le Verrier og andre. Den sidste Mangel er delvis afhjulpelst derved, at Le Verrier har meddelt en anden Række Ligninger, ved Hjælp af hvilke man kan beregne Virkningen af Rettelser til de antagne Værdier af Masserne. Den Analyse, hvorved disse Ligninger ere fundne, forudsætter imidlertid, at Rettelserne ere saa smaa, at man kun behøver at medtage Led af 1ste Orden, en Forudsætning, som senere har vist sig ikke at holde Stik for alle Planeterne; saaledes har Mercurs Masse maattet formindskes med over Halvparten af sin Værdi, Uranus er omtrent  $\frac{1}{4}$  mindre end dengang antaget, og Jordens Masse maa efter de nyere Bestemmelser af Solens Parallaxe været henved  $\frac{1}{10}$  større end man antog før. Til en fuldstændig, eller ialfald til Videnskabens nuværende Standpunkt svarende Besvarelse af Spørgsmaalet vilde der vel saaledes kræves en fuldstændig ny Behandling af det meget indviklede Problem; indtil dette sker, faar man gjøre Afkald paa den yderste Nøiagtighed. Ved Hjælp af Le Verrier's Ligninger har jeg beregnet Værdien af Jordbanens Excentricitet til forskellige Tider, idet jeg har benyttet de Værdier af Masserne for Mercur, Venus, Jorden

og Mars, som Le Verrier senere har antaget som definitive (sidste Bind af Annalerne, Tome XI, 1876), Bessels Værdier for Jupiter og Saturn, samt Newcombs for Uranus. Af denne Beregning fremgaar, at den størst mulige Værdi, som Jordbanens Excentricitet nogensinde kan faa, er 0.0667, altsaa omtr. 4 Gange større end den nuværende; den mindst mulige er naturligvis 0. Forøvrigt har den i Tidens Løb undergaaet følgende Forandringer:

For 99000 Aar siden havde den opnaaet et Maximum af 0.0401, hvorpaa den stadig aftog i 54000 Aar og sank ned til 0.0104; Aftagelsen var naturligvis ikke jevn; den var stærkest for nogle og sexti Tusinde Aar siden. Nu tiltog Excentriciteten atter, saaledes at den for 14500 Aar siden opnaaede et svagt Maximum 0.0193; siden har den stadig aftaget indtil Nutiden (d. e. Aar 1800) og vil vedblive dermed frem i Tiden, indtil den om 24000 Aar er sunket ned til 0.0025, altsaa blot  $\frac{1}{4}$  af den nuværende og  $\frac{1}{27}$  af den størst mulige Værdi. Senere vil den igjen tiltage i Løbet af om trent 40000 Aar, uden dog at opnaa nogen betydelig Værdi, hvorpaa den atter aftager indtil omtr. 80000 Aar frem i Tiden.

Anvendes de foregaaende Formler paa dette, saa kan der anstilles mange Sammenligninger mellem Varmeforholdene paa Jorden i forskjellige Perioder. Saaledes finder man, at Excentriciteten for 70000 Aar siden var 0.02675 og den aarlige Aftagelse 0.000000816; indsættes disse Værdier af  $e$  og  $de$  i Lign. (6), faaes  $da = 0.000000105a = 0.21$  Mile, eller den ved Excentricitetens Aftagelse paa den Tid bevirkede Formindskelse af den aarlige Varmemængde svarer til en Forøgelse af Jordens Afstand fra Solen af næsten  $\frac{1}{4}$  Mil om Aaret. Dette var noget nær den største Værdi, som den aarlige Formindskelse fik i en Periode paa 54000 Aar (nemlig fra — 99000 til — 45000); indsættes i Lign. (7) Værdierne af Excentriciteten ved Begyndelsen og Enden af denne Periode,



nemlig  $e = 0.0401$ ,  $e' = 0.0104$ , faaes  $x - a = 0.000\ 358\ a = 7130$  Mile. Ombyttes  $e$  og  $e'$ , faaes 300 Mile mere; Meningen dermed er naturligvis, at om man tænker sig Excentricitetsforandringen overført paa Afstandsforandringen med Bibehold af den oprindelige Excentricitet 0.04, saa vilde Forskjellen i den aarlige Varmemængde svare til en Forskjel i Afstanden af 7130 Mile, derimod, med Bibehold af den til Slutning opnaaede Excentricitet 0.01, til en Forskjel af 7430 Mile.

Sammenlignes disse to Tidspunkter med Nutiden, paa den Maade, at den nuværende Excentricitet tænkes gjældende hele Tiden, saa findes, at Jorden for 99000 Aar siden fik saameget Varme om Aaret, som om den var 6510 Mile nærmere, derimod for 45000 Aar siden, som om den var 845 Mile fjernere end nu.

Den Periode, hvori Jorden nu befinder sig, begyndte for 14500 Aar siden og vil vedblive 24000 Aar frem i Tiden; tænkes Excentricitetsforandringen overført paa en Afstandsforandring, saaledes at den nuværende Excentricitet gjelder for hele Perioden, saa vare Varmeforholdene for 14000 Aar siden de samme, som om Jorden var 440 Mile nærmere end nu, hvorimod Forholdet om 24000 Aar bliver, som om Jorden var kommet 1340 Mile længere fra Solen; tænkes Jordbanen ved Periodens Begyndelse at have den samme næsten cirkelrunde Form, som den vil faa ved Slutningen, saa vil den virkelig stedfindende Excentricitetsforskjel for disse to Tider svare til en Afstandsforskjel af 1820 Mile.

Sammenlignes den Værdi, som Excentriciteten havde for 99000 Aar siden med den, som den faar om 24000 Aar, saa svarer der til den større Varmemængde, som Jorden fik paa det første Tidspunkt, en 7950 Mile kortere Afstand. Endelig vil den største Værdi, som Excentriciteten nogensinde kan faa, give en aarlig Varmemængde, som, sammenlignet med Varmen i en cirkelformig Bane, svarer til en Middelfastand, der er 22213 Mile kortere end Cirkelens Radius.

Da Kometerne have langt mere excentriske Baner end Planeterne, saa ere de altsaa heldigere stillede for Varmetilførselens Vedkommende, naar Omløbstiderne ere de samme; naturligvis betragtes Tingen her fra et rent numerisk Standpunkt, uden Hensyn til, at de Virkninger, som de tilførte Varmemængder have, ikke kunne sammenlignes. Forresten har Omløbstidens Længde liden Betydning for Kometernes Vedkommende; indsættes nemlig i Lign. (2) den halve Parameter  $p$  istedetfor  $a(1-e^2)$ , saa sees, at den i Omløbstiden modtagne Varmemængde er omvendt proportional med Kvadrat-roden af Parameteren; naar altsaa to Himmellegemers Baner have den samme Parameter, saa blive Varmemængderne de samme, hvad enten Omløbstiderne ere store eller smaa; en Komet, som f. Ex. bevæger sig i en Parabel, hvis halve Parameter er lig Jordbanens, som igjen er ubetydeligt forskjellig fra Jordens Middellafstand, vil i Løbet af sin uendelig lange Omløbstid ikke faa mere Varme fra Solen, end Jorden modtager i et Aar. Nu ere Parameterne for de os bekjendte Kometers Baner indesluttede mellem temmelig snevre Grændser, hvad der er en naturlig Følge af, at kun de Kometer kunne blive synlige for os, hvis Periheldistance ikke er betydeligt større end Jordens Afstand fra Solen (de fleste have sit Perihel indenfor Jordbanen), og Periheldistancen er  $-\frac{p}{1+e}$  altsaa for de fleste Kometer  $-\frac{1}{2}p$ , da de flestes Baner nærme sig stærkt til Parabelen. Af 210 Kometer, som have været observeret i det 18de og 19de Aarhundrede (til Udgangen af 1875), og hvis Baner ere beregnede, er der 64 eller 30 pCt. som have sit Perihel udenfor Jordens Bane, og blot 16 eller 8 pCt. med Perihel udenfor Marsbanen; den største Periheldistance har Kometen af 1729, nemlig 4.043 (naar Jordens Middellafstand = 1), men den staar ganske isoleret, idet den næststørste, nemlig for Kometen af 1747, blot er 2.198. Den mindste Periheldistance, som findes

blandt de 210 Kometbaner, er 0.00554 (dog med nogen Usikkerhed), nemlig for den store Komet af 1843; men ogsaa den staar temmelig isoleret, idet den næstmindste er 0.02601 for Kometen 1865 I. Der er i det hele blot 8 Kometer, hvis Periheldistance er mindre end 0.1.

Undersøges altsaa de Kometer, som i Løbet af et Omløb modtage mest og mindst Varme fra Solen, saa sees, at Kometen af 1729 faar  $\sqrt{8.086} = 2.84$  Gange mindre, og Kometen af 1843  $\frac{1}{\sqrt{0.01108}} = \frac{1}{0.105} = 9.5$  Gange mere Varme end Jorden paa et Aar. Gaar man fra disse to isolerede Tilfælde over til de næste, saa findes, at Kometen af 1747 i et Omløb faar  $\sqrt{4.396} = 2.10$  Gange mindre end Jorden paa et Aar, og at Kometen 1865 I faar  $\frac{1}{\sqrt{0.0520}} = 4.4$  Gangemere.

Alle disse Kometer have uendelige (d. e. os ubekjendt lange) Omløbstider. En Komet med Periheldistancen 0.1 vilde faa 2.2 Gange mere Varme i et Omløb end Jorden paa et Aar. Dette viser altsaa, at den store Mængde af de os bekjendte Kometer faa nogenlunde de samme Varmemængder som Jorden paa et Aar. For de periodiske Kometer bliver Regelen den samme; disses Antal, som forøvrigt indgaar blandt de ovennævnte 210, bliver 13, naar man foruden de 10, som have været seet mere end een Gang (de Vicos af 1844 inclusive) medregner Pons's af 1812, Olbers's af 1815 og Tempels af 1873, som efter Beregningen skulle vise sig i en nogenlunde nær Fremtid, nemlig respektive 1883, 1887 og 1878. Af disse 13, hvis Omløbstider ere mellem 3 og 76 Aar, modtager Enckes Komet i Løbet af et Omløb (3.3 Aar) mest Varme, nemlig 1.28 Gange mere end Jorden paa et Aar, og Fayes Komet mindst, nemlig i Løbet af 7.4 Aar, som er dens Omløbstid, 0.62 af Jordens aarlige Varme, altsaa den ene dobbelt saameget som den anden.

At Omløbstidens Længde ved Kometerne ingen Betydning har for Størrelsen af den under Omløbet modtagne Varmemængde, kommer naturligvis deraf, at den allerstørste Del modtages i Løbet af den korte Tid, da Kometen befinder sig i Nærheden af Periheliet. Betragtes f. Ex. den Tid ( $T'$ ) som Kometen behøver for at gennemløbe  $180^\circ$  om Solen paa begge Sider af Periheliet, eller det dobbelte af den Tid, hvori den sande Anomali voxer fra  $0^\circ$  til  $90^\circ$ , saa sees af Lign. (1), at Kometen i denne Tid modtager netop Halvdelen af den Varme, som den faar under et Omløb. Hvor lang denne Tid er, er let at beregne; kan Banen betragtes som en Parabel, saa har man, med de samme Betegnelser som før, den bekendte Ligning

$$t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{2k} \left( \operatorname{tang} \frac{u}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{u}{2} \right)$$

altsaa  $T' = \frac{4}{3} \cdot \frac{p^{\frac{3}{2}}}{k}$ ; betragtes Aaret som Tidsenhed, saa er  $k = 2\pi$ , altsaa

$$T' = \frac{2}{3\pi} \cdot p^{\frac{3}{2}} \dots \dots \dots (8)$$

Ved elliptiske Baner finder man  $T'$  ved Hjelp af Lign. (5); naar nemlig  $u = 90^\circ$ , saa er  $\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ , eller naar man sætter  $e = \sin \varphi$ ,  $\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi)$ , d. e.  $E = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , altsaa  $T' = 2 \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right)$ , og naar man vil have den udtrykt i Aar

$$T' = a^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{\varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\pi} \right).$$

Vil man derimod have den udtrykt som Brøk af selve Omløbstiden  $T$ , som, udtrykt i Aar, er lig  $a^{\frac{3}{2}}$ , saa faaes

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{2} - \frac{\varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi} - \frac{\sin 2\varphi}{2\pi} \dots \dots \dots (9)$$

Ved Halleys Komet f. Ex. er  $\varphi = 75^\circ 20'$  og  $T = 76.29$  Aar, hvoraf findes  $\frac{T'}{T} = 0.0035$  eller  $T' = 0.267$  Aar = 97 Dage.

Endvidere er  $p = 1.153$ , hvilket indsat i Lign. (2) giver  $V = 0.93$ , naar Jordens aarlige Varme fremdeles betragtes som Enhed. Altsaa modtager Kometen i Løbet af de 97 Dage, da den er nærmest Perihel, 0.465 af Jordens aarlige Varme eller 1.75 Gange saa meget som Jorden i samme Tid.

Enckes Komet modtager, som ovenfor fundet, under et Omløb Varmemængden 1.28; dens Excentricitetsvinkel  $\varphi$  er  $58^\circ 8'5$ , hvilket indsat i Ligning (9) giver  $T' = 0.34$   $T = 41$  Dage. I Løbet af disse 41 Dage modtager den altsaa 0.64 af Jordens aarlige Varme eller 5.8 Gange saameget som Jorden i samme Tid, medens den i de øvrige 1170 Dage af Omløbet modtager den resterende Halvpart af Varmen, som da imidlertid ikke er mere end  $\frac{1}{2}$  af hvad Jorden faar i samme Tid.

Coggias Komet af 1874 har næsten parabolisk Bane, nemlig en Omløbstid af 10000 Aar (med nogle Aarhundreders Usikkerhed). Banens halve Parameter  $p = 1.3505$ ; af Lign. (2) findes  $V = 0.86$  og af Lign. (8)  $T' = 0.333$  Aar = 122 Dage; i Løbet af denne Tid fik Kometen altsaa 0.43 af Jordens aarlige Varme eller 1.29 Gange saameget som Jorden fik i samme Tid; da dette kun var  $\frac{30000}{100000}$  af hele Omløbstiden, saa bliver den anden Halvpart af Varmen, 0.43, at fordele paa de øvrige  $\frac{30000}{100000}$  af Omløbet, altsaa en forsvindende Brøkdel af hvad Jorden faar i samme Tid.

Betragtes endelig den ovenfor nævnte Komet 1843 I, for hvilken fandtes  $V = 9.5$ , saa faaes ved i Lign. (8) at indsætte  $p = 0.01108$ , at  $T' = 0.0002474$  Aar = 0.09 Dag. Paa Grund af sin korte Periheldistance gennemløb altsaa denne Komet en Vinkel paa  $180^\circ$  i lidt over 2 Timer og modtog i denne korte Tid 4.75 Gange saameget Varme som Jorden

paa et helt Aar, eller 19200 Gange saa meget som Jorden i samme Tid.

Under disse Omstændigheder falder det ikke vanskeligt at forstaa de overordentlige Virkninger, som Varmetilførselen fra Solen ofte har paa en Komet i Nærheden af Periheliet. Efter de Vink, som Spektroskopet i senere Tider har givet angaaende Solens (og andre Soles) chemiske Beskaffenhed, er det en rimelig Slutning, at de Elementer, som vor Jord er sammensat af, ogsaa findes paa de andre Planeter og paa Kometerne. Selv om man bortser fra et saa ekstraordinært Tilfælde som det sidste af ovennævnte Exempler, hvor Virkningerne maa falde langt udenfor vore Experimenters Rækkevidde, synes det klart, at de overordentlig stærke Temperaturdifferentser, som ere en Følge af de excentriske Baner, vilde være i Stand til i Tidens Løb at berøve de fleste jordiske Stoffe deres Sammenhængskraft, altsaa til at opløse dem i Smaastykker. Om f. Ex. Jordens Bane pludselig blev saa excentrisk som de fleste Kometbaner, saa maatte det bekjendte Arbejde af Aarstidernes Vexlen, at lægge en Ur ved Foden af enhver Fjeldtop, gjentage sig Aar for Aar i en umaadelig forøget Maalestok over hele Jordkloden. Heraf følger just ikke, at Jorden vilde blive som en Komet at se til, dertil er dens Masse for stor; thi medmindre Perihelidistancen er overordentlig kort, kan Solens forskjellige Tiltrækning paa de forskjellige løse Dele ikke uden ved mindre Masser komme til at virke som den opløsende Kraft, der giver Kometerne deres eiendommelige dunstagtige Udseende, naar de ere synlige for os. Med andre Ord, Kometersnes Udseende staar i nøie Forbindelse med deres Baners Form. Vistnok have enkelte Kometbaner, f. Ex. Tempels af 1867 og Fayes, ikke synderlig større Excentricitet end de mest excentriske af de smaa Planeters Baner; men herved er at mærke, at disse to, saavel som de øvrige Kometer med korte Omløbstider, efter al Sandsynlighed skyldte en eller anden Planet,

især Jupiter, sine lidet excentriske Baner, hvorimod de, før end denne Baneforandring fandt Sted, gjerne i Millioner af Aar kunne have omkredset Solen i saadanne Baner, som gjerne gaa under Navnet paraboliske. Omvendt kan man, hvis dette holder Stik, af Kometernes Udseende slutte, at alle os bekjendte Kometer ere gamle i Solsystemet, d. e. at Historien ikke kan opvise noget Exempel paa en Komet, som ikke har passeret Perihel før.

Dørimod er det ikke utænkeligt, at der for de yderste Planeter stundom kan vise sig Kometer, hvor Temperaturvexlingen ikke har været stærk nok til at frembringe det taageagtige Udseende.

---

## RISEHULEN VED LAVANGSBOTTEN.

(Indleveret 17de Mai).

AF

KARL PETTERSEN.

---

I 1873 modtog jeg fra hr. telegrafist Aslachsen i Sandtorv en længere meddelelse om et af ham aflagt besøg i en hule noget indenfor bunden af den lille fjord Lavangen, der fra Tjelsund lige i nærheden af Sandtorv skjær sig i sydøstlig retning ned mod Ofoten. I forrige høst lå jeg på gennemrejse en dag over på Sandtorv og benyttede lejligheden til at foretage en nærmere undersøgelse af hulen. Hr. Aslachsen ydede mig velvillig sin medhjelp til de dertil nødvendige forberedelser og deltog også selv i den egentlige befarung.

Hulen fandtes indskåret i et kalkstensdrag, der danner en lavere åsryg på omkring 140' højde. Hulens dagåbning ligger ved foden af dette åsdrag i en højde over havfladen af 240' og i en afstand fra Lavangsbotten af lidt over  $\frac{1}{2}$  fjerdingvej. Dagåbningen er så lav, at man i liggende stilling må trække sig ind gennem den. Højden tiltager dog snart så meget, at man kan gå indover om end ofte i bøjet stilling.

Hulen har en længde af 460'. Bredden er vexlende fra 6 til 12', højden varierer mellem 5 à 6'. I midtpartiet hæver den sig dog til en anseelig højde, — på sine steder her når den endog op til omkring 24'.



Hulen ender ikke indad i fast væg men kniber sig her sammen til en trang rende. Hvor langt denne stikker ind i fjeldet kunde ikke nærmere bestemmes. Mulighed var der for at renden gennemskjær hele åsdraget, og at dens dagåbning kunde være at gjenfinde ved åsdragets østlige afhæng ved sammes fod.

Hulen stryger efter en på det nærmeste lige linje indover efter retningen fra SSV til NNO. Den holder langsomt indover — alene på et sted (ved punkt a fig. 1 og 2) falder gulvet i ét sæt med omkring 6'. Gulvet ligger i hulens inderste afslutning 40' under dagåbningen.

Omtrent i hulens midte skjær en sidegang sig indover fra den vestre side med en udmunding mod hovedgangen, der ligger flere fod over dennes gulv. Sidegangen, der gennem en længde af 400' stryger frem efter en på det nærmeste lige retning under en vinkel med hovedgangens retningslinje af  $50^{\circ}$ , gjør her en svingning og løber nu gennem en strækning af omkring 160' efter en med hovedgangen parallel retning. Sidegangen har således en samlet længde af 560' og er altså omkring 100' længere end hovedgangen. Sidegangen afsluttes indad i fast fjeld og danner her en forholdsvis ret rummelig hal.

Medens hovedgangen som nævnt stadig falder indover, stiger derimod sidegangen fra dens udmunding indover temmelig stærkt indtil omkring den linje, hvor den nævnte afbøjning finder sted. Ved denne linje ligger gulvet 74' over hovedgangens dagåbning og 66' over sidegangens udmunding. Stigningen på disse første 400' sker således efter forholdet 1:6. Ved dette punkt falder gulvet i et temmelig stejlt sæt med omkring 6' og herfra stadig og langsomt indad til dens afslutning. Her ligger bunden omtrent 54' over dagåbningen eller 46' over sidegangens udmunding.

Sidegangen har en gennemsnitlig bredde af omkring 10' — i dens inderste afdeling kan den voxe op til omkring 18'.

Afstanden mellem loft og gulv ligger mellem 4 og 6', — ved den omtalte svingning når den op til omkring 12'.

Forholdene ville nærmere findes fremstillede i horisontalsnittet fig. 1 og vertikalsnittet fig. 2. Fig. 3 og 4 viser forskellige tværsnit såvel gennem hovedgangen som gennem sidegangen.

Åsen, hvori gangene ere indskårne, er helt og holdent bygget af krystallinisk kornig kalksten — i ethvert tilfælde gennem hele det felt, hvori gangene træde frem. Kalklagene stryger i regelen i samme retning som hovedgangen — eller  $20^{\circ}$  med  $35^{\circ}$  østligt fald. Hovedgangens loft dannes derfor oftest af sådanne liggende lag og formen af hulens indre tværsnit (se fig. 3 og 4) er hyppig betinget af denne lagstilling, idet loftet under en temmelig spids vinkel skyder ned til gulvets østlige side.

Bunden såvel i hoved- som sidegangen er i regelen belagt med mægtige masser af kalktuf. Ved gravninger der ere foretagne på et par punkter i hovedgangen indtil et par alens dybde, er fast fjeld ikke nået. I hovedgangen er loft ligesom også vægge i regelen stærkt fugtede.

Stalaktitdannelse, der i hovedgangen kun sjældnere træde frem, findes derimod hyppig indover sidegangen og over flere strøg endog udviklet i en rig målestok. Af sådanne findes dels rene drypstene, dannede af hård krystallinsk kalk, dels endnu temmelig bløde af porøs kalksinter ofte smukt og rigt formede stalaktitiske dannelser. Gulvets kalktuf er hyppig gennemsat af cylindriske rør af en hård kalksubstant. Rørhulingerne ere oftest udfyldte med mildere tuf.

Luften er overalt frisk og let, uden at der dog forøvrigt er tegn til nogen stærkere luftvexling. Fra man er nået en 40 à 50' indover er temperaturen konstant  $6^{\circ}$  (R.).

Hovedgangens kubikindhold udgjør omkring 25,000, sidegangens omkring 28,000 kubikfod. Det samlede kubikindhold er altså 53,000 kubikfod eller omkring 245 kubikfavne.

Med hensyn til spørgsmålet om disse ganges dannelse skal fremholdes at hulens dagåbning ligger i en højde af 240' og det højeste punkt inden sidegangen 520' over havfladen. Intet punkt af gangsystemet ligger således højere end at der — i henhold til hvad tidligere er påvist — er al rimelighed for at det fjeldparti, hvori gangene ere indskårne, under den post-glaciale periodes tidligere afsnit indtil denne højde har ligget under havfladen. På forhånd kunde der således være grund til i dette forhold at søge en rimelig forklaring for, hvorledes disse ret anseelige masser kunne være blevne udvadskede og udtransporterede fra gangsystemet.

Ved hovedgangen er der imidlertid i så henseende at se hen til at den stadig skråner indad, så dagåbningen danner det højest liggende parti af gangsystemets gulv og ligger 40' højere end gangens inderste bund. Forholdene ved dagåbningen synes også med al bestemthed at tale mod en forudsætning om at denne i nogen væsentlig mon kan være hævet ved senere udfyldninger. Der er i henhold hertil liden rimelighed for at transporteringen af det udvadskede materiale fra de dele af hovedgangen, der ligger indenfor punktet (a), i nogen væsentlig grad kan være foregået gennem den nuværende dagåbning. Derimod kan der være nogen mulighed for at udtransporteringen kan være foregået ad den anden kant. Som ovenfor nævnt afsluttes hovedgangen ikke i fast fjeld, men kniber sig her sammen i en smal rende, som ikke videre kunde forfølges. Der kan således være nogen sandsynlighed for at gangen her kan have haft sin egentlige udløbskanal, der således har ført ud mod åsryggens østlige side. Og under forudsætning af at hulen er dannet i det væsentlige gennem udvadskning må også forholdet utvivlsomt have været dette.

For sidegangens vedkommende — i strøget fra dens udmunding i hovedgangen indtil punktet (i) — kan udtransporteringen af det udvadskede materiale muligens være foregået gennem den nuværende dagåbning. Forholdet lader sig dog

også her lettest forklare ved forudsætningen om et udløb ved hovedgangens nordøstlige ende. Vanskeligere bliver derimod spørgsmålet i så henseende for den indre del af sidegangen — fra punktet (i) indover. Hulen ender her i fast fjeld og der såses intet tegn til at nogen kanal eller rende herfra skjød sig videre indover. Skulde også denne del af hulen være dannet ved udvaskning, så vilde dette antagelig alene have været muligt under forudsætning af at hulens bund her i virkeligheden ikke — som det nu synes — ligger synderlig lavere end gulvet udenfor, men at stigningen her egentlig er et resultat af senere påfyldninger af det fra loftet gennem tidernes løb nedsilrede kalktuf eller kalkslam. Hvorvidt dette skal være tilfældet, derom skal jeg ikke nu kunne udtale mig med nogen mere bestemthed. Jeg havde under befaringen ikke opmærksomheden henvendt på dette spørgsmål. For en sådan forudsætning kan måske det forhold vidne, at loftet fra punktet (i) indover, trods det at hulens gulv med engang falder flere fod, dog i længere strækning indover fremdeles bevarer nogenlunde den samme højde som den har ved (i) — imod en sådan forudsætning at loftet dog i det hele også har afhold indover.

Rimeligst er det måske at forudsætte at der har været sprækker eller revner i fjeldpartiet fra en tidligere tid end den under hvilken den egentlige udvaskning tog sin begyndelse.

At stalaktit-, sinter- og tufdannelsen i så langt højere grad træder frem i sidegangen fremfor i hovedgangen er en naturlig følge af beliggenheden i vertikalplanet. Sidegangen skyder nemlig op imod åsryggens dagflade, således at den ved punktet (i) ikke ligger mer end omkring 40' under samme. Dagvandet har således her en forholdsvis let adgang til at sive frem mellem kalklagene og nå ned til hulens lofthvælving.

Jeg skal sluttelig tilføje at højdebestemmelserne ere tagne ved et i det metor. institut korrigeret aneroidbarometer, og at målene forøvrigt ere tagne ved kjæde og opskridten.

Tromsø den 6te maj 1876.

---

skiferen indeslutter her hyppige indlejninger af kornig kalksten. Skiferen er rigt indflettet med røde granater. Opover Slunkas højfjeld sees i skiferen hyppige kvartsudsondringer med indvoxet Disten (Cyanit). Rullestene af en brunlig enstatitartet sten laa her omstrøet i stort tal. Trods omhyggelige undersøgelser lykkedes det dog ikke at træffe bergarten i fast fjeld.

Over højfjeldet østenom Slunka optræder i skiferen hyppige og tildels mægtige indlejninger af kornig kalksten. Glimmerskiferen findes her i vexling med hornblendeskifer og paa sine steder med lag af granitisk sten. Østen om det af skifer byggede højfjeld skyder der frem en række af granitiske toppe, der stiger op om den øvre del af Gjerdalselven. Glimmerskiferen ligger her over indlandsgraniten, og strøgetningen bøjer sig i regelen efter granitfeltets grændselinje.

Den paa ridset afsatte skiferafdeling østenom granitdraget er afsat i henhold til de fra højfjeldet anstillede iagttagelser. Fra dette punkt saaes nemlig østover en række af lave aasdrag, der utvivlsomt maatte være byggede af skifer. Disse lagrækker her staa antagelig i umiddelbar forbindelse med lagrækker af glimmerskifer og sandstensagtig kvartsit, der langs rigsgrændsen indenfor Hellemobotten fandtes at afløse indlandsgraniten. Disse lagrækker, der overleje graniten under en strøgetning af  $160^{\circ}$  med  $45^{\circ}$  østligt eller sydøstligt fald, bygge herfra fjeldpartierne indover svensk side. Hvorvidt disse lagrækker indenfor Hellemobotten er at indordne under Tromsø glimmerskifer, eller om de muligens skulle tilhøre en yngre gruppe maa indtil videre lades uafgjort. Jeg er foreløbig mest tilbøjelig til at holde paa den første forudsætning.

Fra bunden af den lille Tysfjord (se profilrids fig. 3) opover Kjeldragets højdepunkt her (4580') bygges fjeldpartierne af glimmerskifer med sparsomme indlejninger af kalksten. Strøgetningen er her adskillig variabel, men nærmer sig i regelen til omkring øst-vestlig med sydligt fald. Ogsaa kulstofholdige skifere (sorte skifere med sort streg) ere bemærkede. Dette

højfjeld stiger op strax nordenfor kjølgranitens grændselinje mod nord, men rejser sig indtil et par tusinde fod højere end dette.

### 3. Balaffjordens skifergruppe

træder frem paa tre forskellige punkter efter profilridset fig. 1.

Det vestligste parti bygger her de lavere aasdrag langs Salten i strøget fra gaarden Jensvold — noget indenfor Bode kirke — østover forbi Kvalvaag og Vikan ind imod bunden af Hopen.

Lagrækkerne her dannes af mild glimmerskifer, lerglimmerskifer og glindsende skifer med milde sorte kulstofholdige skifere med sort streg.

Strøgretningen er her oftest  $60^{\circ}$  med afbøjning til øst, faldet nordvestligt til nordligt.

Skiferlagene her findes hyppigt gjennemsatte af granitiske gangpartier, der stryge paa det nærmeste lodret mod skiferens strøgretning, altsaa nogenlunde i nordsydlig retning. Lidt indenfor gaarden Vikan sees to parallelt løbende granitiske gange, af hvilke den ene spænder sig helt fra stranden henover underlandet og derfra opover hele afhængen af det herfra stigende omkring 800' høje aasdrag.

Den granitiske gangsten skyder oftere op over skiferlagene, men viser sig her hyppig overtrukket med et tyndere overdrag af uforandret skifersubstans. Rimeligvis maa den her tidligere ganske have været overdækket med skiferlag.

Over den lille fremspringende halvø, der fra Fuske kirke skyder sig sydover mellem Fuskevaag og Klungsetvik, dannes den faste bjerggrund af regelmæssig paa hinanden følgende lagrækker, der vise en strøgretning af  $50$  à  $60^{\circ}$  med nordvestligt fald. Over et profil fra Fuskevaag til Klungsetvik dannes lagrækken nedenfra opad af

- a) tyndlaget grovkornig blaalig kalksten i mægtige masser. Kalkstenen er ofte indflettet med lameller af en lerskiferagtig sort glindsende skifer (tildels indfældt med haard grafit),
- b) derover lagrækker af glindsende skifer i vexling med kvartsskifer (sandstenagtig kvartsit), der navnlig træder frem langs Klungsetviken. Skiferen viser sig her smukt flammet og indeslutter hyppige nyreformige og knolleformige brudstykker og udsondringer af kvarts, kvartsit og rødlig kalksten. Den træder saaledes frem med et halvt breccieartet præg. Skiferen viser sig her paa en vis maade som en forløber for en mægtig halvt breccie- halvt konglomeratartet dannelse, der træder frem over halvøens længst fremskydende parti, — det saakaldte Øjskavlnes. Nesset, der her skyder op i en omkring 100' høj aas, er fra stranden opover bygget af større og mindre brudstykker af kvarts og oftest rødlig kalksten, sammenbundne dels ved et kalkholdigt dels ved et haardt skiferagtigt bindemiddel. De indkittede brudstykker ere ofte skarpkantede, hyppig ogsaa langagtig linseformige.

Hvorvidt dette breccieartede Konglomerat ligger over eller under skiferen kunde ikke ligefremt iagttages — paa forhaand er der mest grund til at forudsætte det sidste.

Dette skiferparti tilligemed Øjakavlnessets Konglomerat ligger lidt søndenfor den paa profilridset optrukne linje, — og er saaledes ikke angivet paa dette.

Et tredie parti af Balsfjordens skiferfelt træder frem i de fra Øvre Vand — i Vattenbygden — stejlt opstigende og nøgne fjeldvægge langs den nordlige side af vandet til henimod Norddalen. Langs denne strækning sees stærkt foldede og pressede lagrækker af glimmerskifer, kvartsitisk skifer og haardskifer i vexling med baandstriber af hvid og rød kalk at danne et overordentlig pragtfuldt fletværk. Øjet bliver ikke træt af paa denne lange strækning at følge disse fine i form og farve saa

afvexlingsrige og dog saa regelmæssige tegninger, som saaledes træde frem opover \*fjeldvæggene. Der er alene paa et punkt inden landets nordlige strøg, at noget hertil svarende kan sees trædende frem — nemlig strax ved Bosekop i Alten. Henimod indbøjningen til Laxaa ved Norddalelvens udmunding gaar disse foldede lagrækker over i en konglomerartet dannelse, der snart igjen afløses af stejlt og regelmæssig stillede lagrækker af glimmerskifer tilhørende Tromsø glimmerskifergruppe.

At disse saa forunderlig foldede masser tilhører en gruppe, der er yngre end glimmerskifergruppen, derfor synes der at være al rimelighed, uagtet det indbyrdes lejningsforhold ikke er klart at aflæse. Konglomeratet, der minder om Øjskavnessets konglomerat, synes at pege hen paa, at disse dannelser kunne være at sammenstille under samme hovedgruppe.

Fra midten af Lang-vandet afløses Tromsø glimmerskifer af lagrækker, der i de dybeste partier langs vandet dannes af glindsende glimmerskifer, tyndlaget kvartsitisk glimmerskifer i oftest smuk regelmæssig lagstilling med svagt fald — lagstillingen oftest svævende. Højere op over fjeldmassen til Lommijavre dannes bjergarten af mild glindsende lerglimmerskifer og sort lerskifer i vexling med mild kloritisk grønlig skifer med udsondringer og nyrer af kvarts og brunlig kalkspath. Opover højfjeldet er faldet svagt ( $15^{\circ}$ ) nordvestligt.

Disse lagrækker overleje Tromsø glimmerskifer og indordnes her foreløbig under Balsfjordens skiferafdeling. De synes fremdeles at udbrede sig over fjeldmassen syd om Langvandet. Søndre Sulitelma, der stiger op umiddelbart fra Lommi-javres nordside, er et godt stykke opover bygget af de samme lagrækker, medens de egentlige Sulitelma-toppe antagelig ere byggede af krystallinske skifere — maaske som før nævnt gjennemsatte af gabbroartede eller dioritiske partier.

At slutte fra optegnelserne i Gæa kan der være nogen sandsynlighed for at forudsætte, at afdelinger, der ere at parallelisere med den her omhandlede skiferafdeling ved Langvandet



og Lommijavre, optræder i mer og mindre mægtige partier over Kjeldraget sydigjennem Helgeland. Muligens kunne disse afdelinger blive at indordne under en af de trondhjemske skiferafdelinger.

#### 4. Kjelgraniten

bygger et anseligt sammenhængende felt, der mod syd tager sin begyndelse omkring Strøms- og Ankilvandene — ved bunden af Sørfolden — og herfra breder sig ud i nordlig reining langs Kjeldragets vestlige afhæng op til bunden af Mandfjord — en af Tysfjordens sidefjorde. Ved Ankilvandet skyder graniten frem som en smal afsluttende kile, der imidlertid snart voxer i brede østover, saa den fra bunden af Lørfjorden og nordover til feltets afslutning — enkelte indskaarne skiferlige fraregnede — bygger den hele fjeldgrund fra Kjeldragets vestlige afhæng indtil rigsgrænsen. Granitdraget har saaledes en længdeudstrækning fra nord mod syd af omkring 7 norske mil med en gennemsnitlig brede af omkring 3 mil.

Den her frembrydende granitiske bjergart viser i regelen en stærk fremtrædende graalighvid grundfarve. Den dannes af hvidlig orthoklas, gjenemsigtig kvarts og sort magnesiaglimmer. Glimmeren findes oftest samlet i større og mindre flag og som saadanne enten stribevis eller mere uregelmæssig fordelte om i grundmassen.

Kjelgraniten stiger langs vestranden hyppigst op i nøgne og stejle fjeldvægge. Højfjeldet afsluttes her sjeldnere i spidser og tinder, hyppigst derimod i mere mildt formede koller og bølgeformige rygge.

Bjergarten træder kuns sjeldnere frem som renere granit — i regelen er den at paavise i en bestemt fremtrædende parallelstruktur, og ikke saa sjeldent gaar den over til renere gneis.

Efter profilridset fig. 2 træder Kjelgraniten frem over det omkring 1600 fod høje fjelddrag, der stiger op mellem Makejdet og Sagelvdaal. Over fjeldhøjden her er graniten temmelig

gneisartet og gjenneomsættes hyppig af kvartslejer af indtil 1 fods mægtighed.

Langs granitfeltets vestside bryder den massive bjergart frem af glimmerskifergruppen, hvis lagrækker her i regelen viser en strøgetning parallel granitdragets grændselinje med et oftest stejlt til vertikalt fald — snart fra graniten men ogsaa med indskyden ind under denne.

Langs den sydligst fremspringende granitiske kile ved Ankilvandet skyder saaledes glimmerskifer ved vestsiden med stejlt østligt fald ind under graniten. Fra Ankilvandet stiger graniten i stejle styrtninger op til en højde af mellem 2 à 3000 fod. Men allerede nede fra vandet sees en brem af skiferlag over fjeldmassens højeste parti at ligge over graniten. Grændsen mellem granit og skifer er her klart aftegnet. Stiger man op over højfjeldet, saa finder man her disse øverste skiferpartier dannede af glimmerskifer og kvartsitisk skifer, der her viser en nord-sydlig strøgetning med østligt fald. Disse lagrækker tilhører utagelig Tromsø glimmerskifergruppe<sup>1)</sup>, og i saa tilfælde stikker graniten altsaa her frem som et mægtigt leje inden glimmerskiferen.

Glimmerskiferens lagstilling synes i det hele og store at bøj sig efter granitdragets grændselinjer. Dette forhold kan synes at skulle støtte en forudsætning om Kjelgranitens eruptive oprindelse. Paa den anden side er der imidlertid ogsaa forskjellige forholde at aflæse, der kunne pege hen paa at den inden skifergruppen raadende lagstilling ikke kan være at tilskrive frembrudet af eruptionsmasser. Disse forholde er nærmere omhandlede paa et andet sted<sup>2)</sup>, hvortil der i saa henseende her skal henvises. Ligesom der saaledes paa den ene side af den langs granitdragets grændsestrøg raadende lagstilling

---

<sup>1)</sup> Forholdet i saa henseende vil dog først kunne udredes med fuld bestemthed ved at udstrække undersøgelserne ind over svensk Lapmark.

<sup>2)</sup> „Saltens Orografi“.

inden skiferafdelingen ikke antages at være nogen fuld beretigelse til deraf at drage slutninger om Kjelgranitens eruptive oprindelse, saa skal det paa den anden side ogsaa kunne fremholdes, at Kjelgraniten, hvad enten man ser hen til bjergartens petrografiske egenskaber eller til de inden feltet raadende struktur- og bygningsforholde i det hele og store ganske synes at maatte blive at sammenstille med kyststrækningens gneisgranit.

Profilrids fig. 5, der er trukket i vest-østlig retning fra Sagfjord over Hellemofjord til rigsgrænsen mellem grændserøene 250 og 249, vil maaske tjene til at kaste noget lys over Kjelgranitens forhold til kystens gneisgranit.

- a) Gneis-granit.
- b) Ved Hellemofjordens indre afbøjning i sydøstlig retning — tversovenfor Musken — afløses gneisgraniten af lagrækker af glimmerskifer, der med en strøgetning af 30 à 40° viser et østligt fald af 50 à 60°. Den i dagen ofte stærkt brunrøde skifer indeslutter mægtige lag af kornig kalksten. To saadanne kalkzoner findes angivne paa ridset.
- c) I nærheden af den fra Hellemofjorden mod nord indskydende Nordfjord afløses skiferafdelingen — der her følges i en strækning af nær en halv mil — af Kjelgraniten, der herfra fortsætter i sammenhæng indtil henimod rigsgrænsen, hvor den igjen afløses af de før omhandlede
- d) lagrækker af glimmerskifer, kvartsitisk skifer og sandstenagtig kvartsit, der viser en strøgetning af 160° med 40° østligt fald.

Det orografiske knudepunkt (centralpunkt) for kyststrækningens gneis-granit er som vist paa et andet sted<sup>1)</sup> at søge over den sydlige del af den store Hinde om bunden af Øgs-

---

<sup>1)</sup> „De gneis-granitiske dannelser langs det nordlige Norges kyststrøg“.

fjord, hvor gneis-graniten i Møsadlen stiger op til sin største højde. Skulde Kjelgraniten altsaa være at indordne under gneisgraniten, saa skyder dette felt fra Hindøen sydover i to hovedforgreninger — den ene i sydvestlig retning nedover Lofotens øer den anden over Tysfjorden i sydlig eller sydøstlig retning ned mod Vattenbygden i Skjærstad.

24de Marts 1876.

---





Fig. 1.

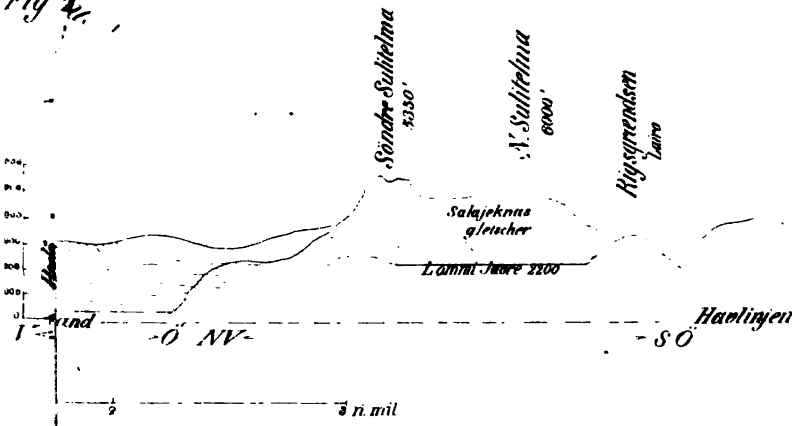


Fig. 2. Rigsgrænsen

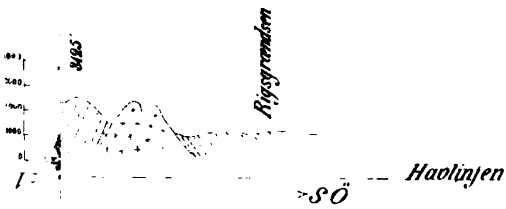
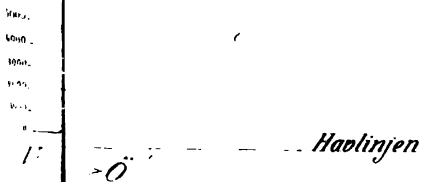


Fig. 3. Sneffeld







# Risehulen

ved  
Lavanaschotten

Fig 1 horns sent.

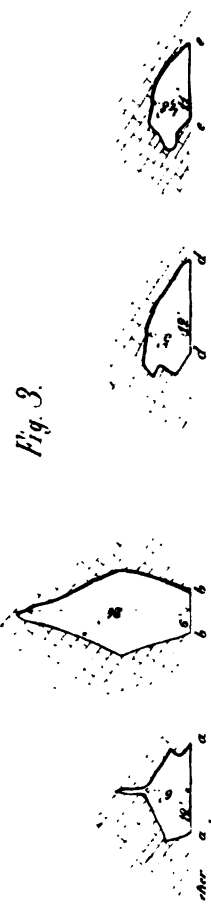


Fig. 3.

Tversnit gjennem hovedgangen A.  
(i forskrevet størrelse.)

Fig 4.



Tversnit gjennem sidegangen B.

M. L. 1894. 10. 10. 1894.







•

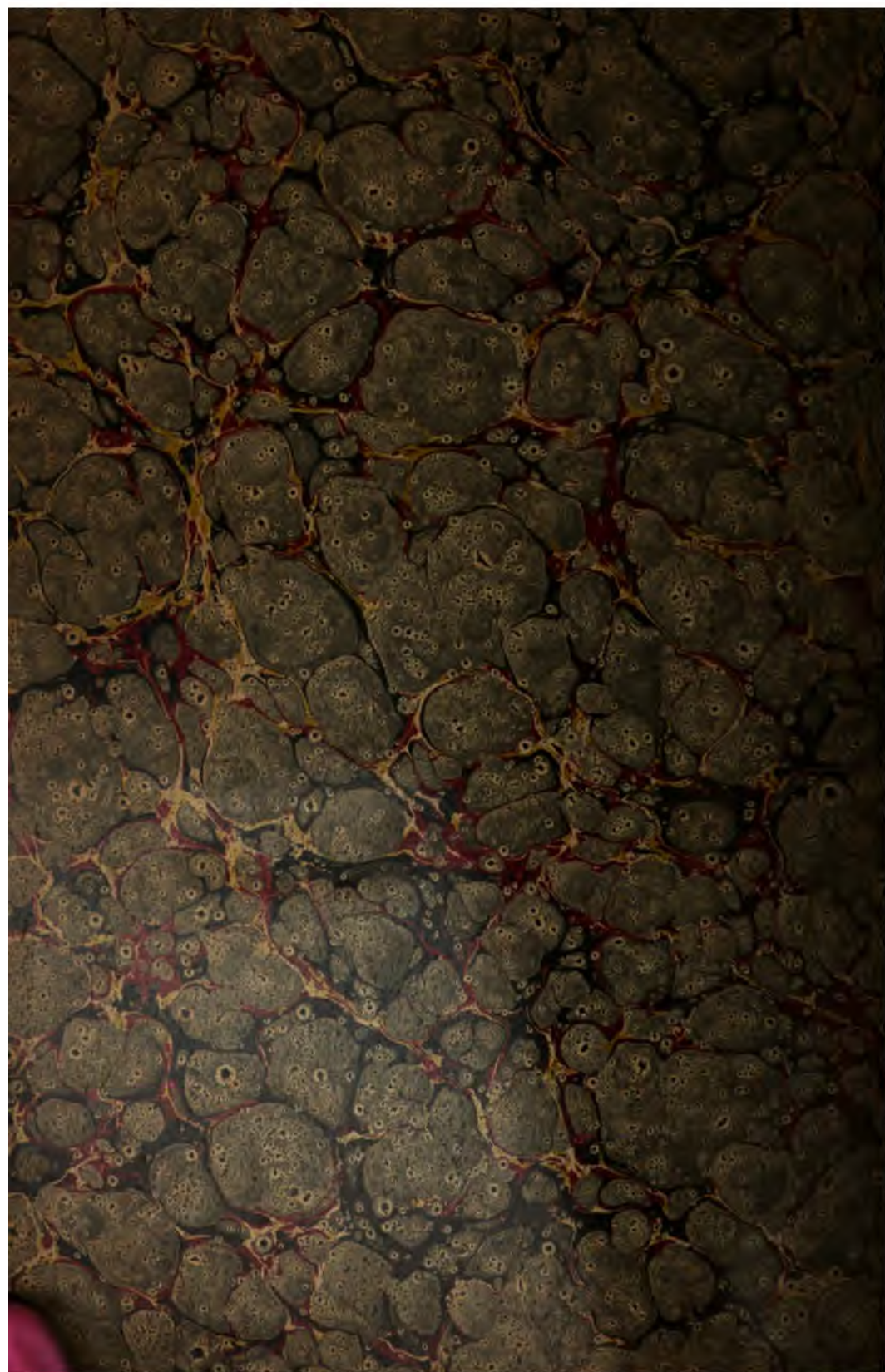
•

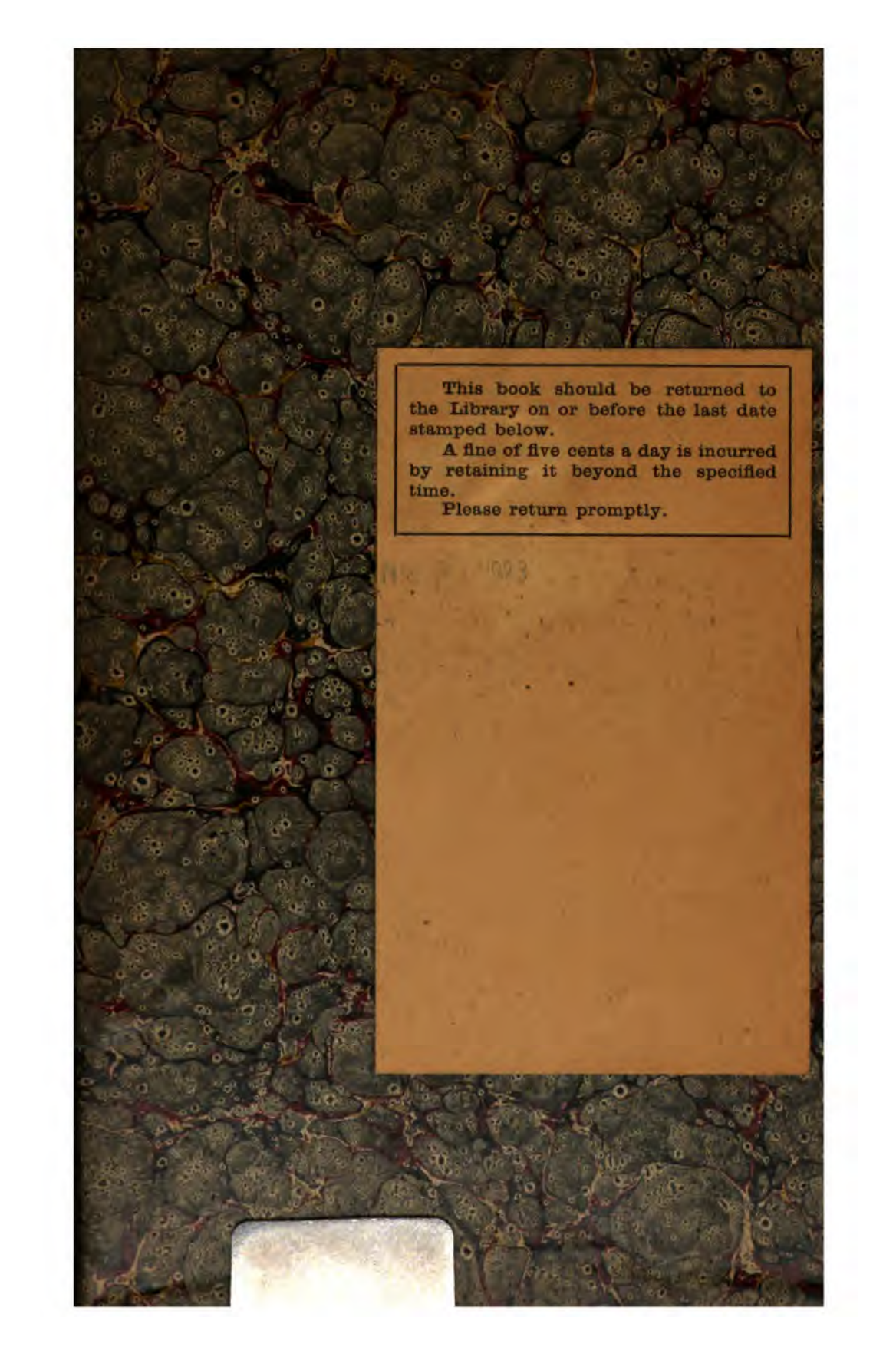
•

•

•

•



The image shows the front cover of a book. The cover is decorated with a traditional marbled paper pattern, featuring a dense, irregular design of dark green, brown, and reddish-brown spots and veins. A rectangular, light-brown paper label is affixed to the right side of the cover. The label contains a printed notice regarding the book's return to the library. The text on the label is as follows:

This book should be returned to  
the Library on or before the last date  
stamped below.  
A fine of five cents a day is incurred  
by retaining it beyond the specified  
time.  
Please return promptly.

Below the text on the label, there is a faint, handwritten number '1003' in the upper left corner of the label's area. The label itself is blank except for the printed text and the handwritten number.

A fine of five cents a day is incurred  
by retaining it beyond the specified  
time.

Please return promptly.

1003





3 2044 102 937